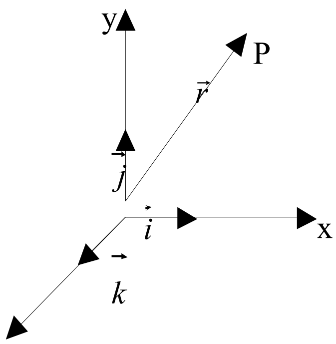
1 Kinematika hmotného bodu

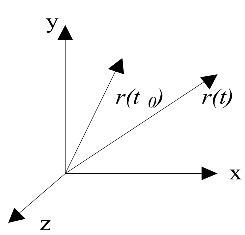
- ***kinematika*** sa zaoberá určením polôh bodov a ich zmien v čase (kinematika pohyb telesa opisuje, nezaoberá sa príčinami pohybu)
- pri teoretickom štúdiu ***mechanického pohybu*** (proces, pri ktorom sa mení poloha jedného telesa vzhľadom na iné teleso) sa zavádza pojem ***hmotný bod***
  - ***hmotný bod*** je model telesa, pri ktorom sa hmotnosť telesa zachováva, ale jeho rozmery sa zanedbávajú
- na opis mechanického pohybu sa zavádza ***vzťažný bod*** a ***vzťažná sústava***, vzhľadom na ktorú určujeme polohu telesa a jej zmenu v závislosti od času
- pokoj alebo pohyb môžeme určovať len vzhľadom na vzťažnú sústavu – relatívnosť pokoja a pohybu (relatívnosť mechanického pohybu znamená, že opis pohybu závisí od voľby vzťažnej sústavy)
- ***trajektória*** je množina (súhrn) všetkých polôh, v ktorých sa hmotný bod pri pohybe vyskytuje, dĺžka trajektórie sa nazýva ***dráha***
- ak trajektória hmotného bodu je časť priamky, koná bod ***priamočiary pohyb***, v ostatných prípadoch je to ***krivočiary pohyb***

1.1 polohový vektor



- polohový vektor určuje polohu hmotného bodu vzhľadom na súradnicovú sústavu
- poloha v priestore je jednoznačne daná polohovým vektorom $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$, pre ktorý platí:
  - $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
    $\vec{r} = (x, y, z)$
- x, y, z sú súradnice vektora a $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sú **jednotkové vektory** v smere jednotlivých osí, platí:
  - $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$
    $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$
- ***veľkosť polohového vektora:***
  - $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- ***smer polohového vektora:***
  - smer polohového vektora sa určuje pomocou uhlov α, β, γ, ktoré zviera smer polohového vektora so smermi jednotlivých súradnicových osí x, y, z
  - $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\cos\beta = \frac{y}{r}$, $\cos\gamma = \frac{z}{r}$, zároveň platí: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

1.2 rýchlosť



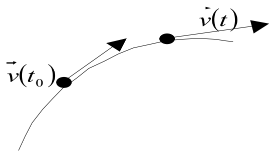
- rýchlosť pohybujúceho sa bodu sa môže v každom okamihu meniť, nemusí byť konštantná
- ***priemerná rýchlosť hmotného bodu:***
  - zmena polohového vektora bodu za čas t
  - $\overrightarrow{v_p} = \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, $[v] = m.s^{-1}$
- ***okamžitá rýchlosť hmotného bodu:***

- prvá derivácia polohového vektora podľa času
- $\overrightarrow{v_0} = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

- ***zložky rýchlosti:***
  - $\overrightarrow{v_0} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$
- ***veľkosť rýchlosti:***
  - $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}$
- ***smer rýchlosti:***
  - keďže hodnota derivácie funkcie v bode sa rovná smernici dotyčnice ku grafu funkcie, tak rýchlosť má smer dotyčnice k trajektórii
  - smer rýchlosti sa určuje pomocou uhlov α, β, γ, ktoré zviera smer rýchlosti so smermi jednotlivých súradnicových osí x, y, z
  - $\cos\alpha = \dfrac{v_x}{v}$, $\cos\beta = \dfrac{v_y}{v}$, $\cos\gamma = \dfrac{v_z}{v}$, zároveň platí: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

1.3 zrýchlenie

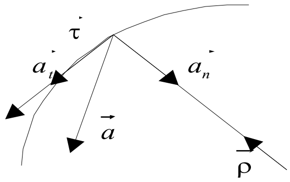
- zrýchlenie pohybujúceho sa bodu sa môže v každom okamihu meniť, nemusí byť konštantné
- charakterizuje zmenu pohybového stavu
- ***priemerné zrýchlenie hmotného bodu:***
  - zmena vektora rýchlosti za čas *t*
  - $\overrightarrow{a_p} = \dfrac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)}{t - t_0} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, $[a] = m.s^{-2}$



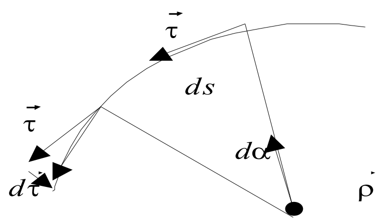
- ***okamžité zrýchlenie hmotného bodu:***
  - prvá derivácia rýchlosti podľa času (druhá derivácia polohového vektora podľa času)
  - $\overrightarrow{a_0} = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)}{t - t_0} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$
  - $\vec{a}_0 = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\vec{v} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{d}{dt}\vec{r} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$
- ***zložky zrýchlenia:***
  - $\vec{a}_0 = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\right) = \dfrac{dv_x}{dt}\vec{i} + \dfrac{dv_y}{dt}\vec{j} + \dfrac{dv_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$
- ***veľkosť zrýchlenia:***
  - $a_0 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\dfrac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dv_z}{dt}\right)^2}$
- ***smer zrýchlenia:***
  - smer zrýchlenia sa určuje pomocou uhlov α, β, γ, ktoré zviera smer zrýchlenia so smermi jednotlivých súradnicových osí x, y, z
  - $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{v}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{v}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{v}$, zároveň platí: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

1.4 zrýchlenie pri krivočiarom pohybe

- zrýchlenie pri krivočiarom pohybe sa rozdeľuje ne zložku *tangenciálnu (dotyčnicovú)* a zložku *normálovú (dostredivú)*, pričom výsledné zrýchlenie je vektorovým súčtom týchto zložiek:
  - $\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n}$
- pre obvodovú rýchlosť platí: $\vec{v} = v\vec{\tau}$
- $\vec{\tau}$ (má smer dotyčnice ku krivke) a $\vec{\rho}$ (má smer normály ku krivke) sú ***jednotkové vektory***, pričom platí:
  - $\vec{\tau} \perp \vec{\rho}$ a zároveň $|\vec{\tau}| = |\vec{\rho}| = 1$



- pre zrýchlenie platí:
  - $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\vec{\tau}\right) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$
- pre $\vec{\tau}$ platí:
  - $\vec{\tau}.\vec{\tau} = |\vec{\tau}||\vec{\tau}|\cos 0° = 1$ (skalárny súčin) $\Rightarrow$
  - $\frac{d\vec{\tau}}{dt}\vec{\tau} + \vec{\tau}\frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0 \Rightarrow 2.\vec{\tau}\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \overset{\cos 90 = 0}{0} \Rightarrow \vec{\tau} \perp \frac{d\vec{\tau}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{\tau}}{dt} \,||\, \vec{\rho}$
  - $d\vec{\tau}$ je zmena vektora $\vec{\tau}$ za čas dt



- podľa obr. platí:
  - $|d\vec{\tau}| = |\vec{\tau}|.d\alpha = d\alpha$ a $d\alpha = \frac{ds}{R}$
- platí:
  - $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|.\left(-\vec{\rho}\right) = \frac{|d\vec{\tau}|}{dt}.\left(-\vec{\rho}\right) = \frac{d\alpha}{dt}\left(-\vec{\rho}\right) = \frac{ds}{dt}.\frac{1}{R}\left(-\vec{\rho}\right) = \frac{v}{R}.\left(-\vec{\rho}\right)$
- pre zrýchlenie platí:
  - $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{v}{R}\left(-\vec{\rho}\right) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} - \frac{v^2}{R}\vec{\rho}$
- ***tangenciálne (dotyčnicové) zrýchlenie:***
  - pôsobí v smere dotyčnice, mení veľkosť (obvodovej) rýchlosti
  - $|\vec{a_t}| = \frac{dv}{dt}$
- ***normálové (dostredivé) zrýchlenie:***
  - pôsobí v kolmom smere na smer rýchlosti, mení smer rýchlosti
  - $|\vec{a_n}| = \frac{v^2}{R}$
- ***veľkosť celkového zrýchlenia:***
  - $|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

1.5 uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie

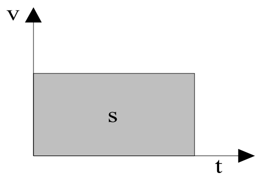
- ***uhlová rýchlosť:***
  - $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$, $[\omega] = s^{-1}$
- ***uhlové zrýchlenie:***
  - $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $[\varepsilon] = s^{-2}$

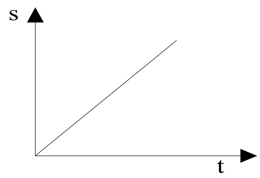
- uhlová rýchlosť súvisí s obvodovou rýchlosťou pohybujúceho sa bodu vzťahom:
    - $v = R\omega$, kde R je príslušný polomer krivosti
- pre obvodovú rýchlosť platí:
    - $v = \frac{ds}{dt}$
- pre a_t platí:
    - $a_t = R\varepsilon$

1.6 niektoré druhy pohybov

1.6.1 rovnomerný priamočiary pohyb

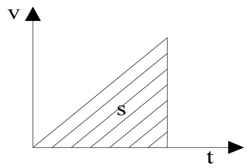
- pre rýchlosť zrýchlenie a dráhu platí:
    - $v = konšt.$
    - $a = \frac{dv}{dt} = 0$
    - $s = \int v.dt = vt + s_0$, kde s_0 je dĺžka dráhy v čase *t=0*

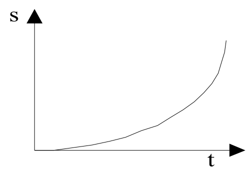




1.6.2 rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb

- pre zrýchlenie, rýchlosť a dráhu platí:
    - $a = konšt.$
    - $v = \int a.dt = at + v_0$, kde v_0 je začiatočná rýchlosť
    - $s = \int v.dt = \int (at + v_0)dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$

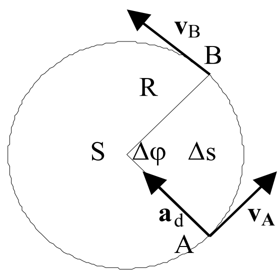




- ak $a<0$, tak ide o ***rovnomerne spomalený priamočiary pohyb***, v tomto prípade a nazývame ***spomalením*** (pri spomalenom pohybe má rýchlosť a zrýchlenie opačný smer)

1.6.3 rovnomerný pohyb po kružnici

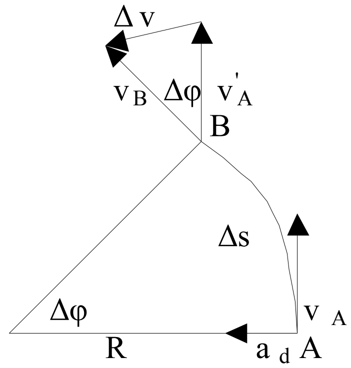
- pohyb, pri ktorom sa hmotný bod pohybuje po trajektórii tvaru kružnice, pričom jeho rýchlosť je konštantná
- hmotný bod koná rovnomerný pohyb po kružnici, ak za rovnaké ľubovoľne zvolené časové úseky *Δt* opíše rovnako dlhé oblúky kružnice *Δs*, ktorým prislúchajú rovnako veľké uhly *Δφ*, pričom $\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R}$



- pre uhlovú a obvodovú rýchlosť, uhlové zrýchlenie a uhol platí:
    - $\omega = konšt.$
    - $v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f = \omega R$
    - $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$
    - $\alpha = \int \omega.dt = \omega t + \alpha_0$, kde α_0 je uhol, ktorý zviera polohový vektor pohybujúceho sa bodu vzhľadom na stred kružnice v čase *t=0* s určitým, za základ zvoleným smerom polohového vektora
- ***perióda T:***
    - čas, za ktorý bod raz obehne kružnicu

- $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{R\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$

- ***frekvencia f:***
    - počet obehov za jednotku času
    - $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$
- ***iné odvodenie normálového (dostredivého) zrýchlenia:***
    - za dobu *Δt* hmotný bod prejde oblúk dĺžky $\Delta s = R.\Delta\varphi$, ktorému zodpovedá uhol $\Delta\varphi = \omega.\Delta t$
    - pre zmenu okamžitej rýchlosti v dôsledku zmeny jej smeru platí:
        - $\Delta v = v.\Delta\varphi = v.\omega.\Delta t = \frac{v^2}{R}.\Delta t$ a z toho
        - $a_d = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} = v\omega = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R$



1.6.4 rovnomerne zrýchlený pohyb po kružnici

- pre uhlové zrýchlenie, uhlovú rýchlosť a uhol platí:
    - $\varepsilon = konšt.$
    - $\omega = \int \varepsilon.dt = \varepsilon t + \omega_0$
    - $\alpha = \int \omega.dt = \int (\varepsilon t + \omega_0) dt = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \alpha_0$