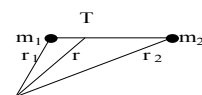


## 2 Mechanika tuhého telesa

- pri opise pohybu pevného telesa nemôžeme vždy zanedbať jeho rozmery tak ako pri hmotnom bode, a tak zavádzame model reálneho pevného telesa – **tuhé teleso**
  - **tuhé teleso** je ideálne teleso, ktorého tvar a objem sa účinkom ľubovoľne veľkých síl nemení
- medzi časticami telesa pôsobia vnútorné sily, ktoré sa navzájom rušia, a tak nemajú vplyv na pohybový stav telesa ako celku
- zmenu pohybového stavu môžu spôsobiť len vonkajšie sily (vnútorné sily sa navzájom rušia)
- tuhé teleso môže konať:
  - **posuvný (translačný) pohyb**
    - všetky body telesa majú v ľubovoľnom okamihu rovnakú okamžitú rýchlosť a opíšu za ten čas rovnakú trajektóriu
  - **otáčavý (rotačný) pohyb**
    - všetky body telesa majú v ľubovoľnom okamihu rovnakú okamžitú uhlovú rýchlosť, opisujú kružnicové trajektórie, ktorých stredy ležia na jednej priamke – *os otáčania*
  - pohyb zložený z týchto pohybov

### 2.1 ťažisko telesa

- ťažisko telesa je pôsobisko tiažovej sily, ktorá pôsobí na teleso
- **dva hmotné body:**
  - pre polohu ťažiska platí:
    - $$\vec{r}_{12}^* = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$
  - platí: pomer hmotnosti hmotných bodov sa rovná obrátenej hodnote pomeru vzdialenosti ťažisk hmotných bodov od výsledného ťažiska ( $m_1 : m_2 = d_2 : d_1$ )
- **tri hmotné body:**
  - pre polohu ťažiska platí:
    - $$\vec{r}_{123}^* = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$
- **N hmotných bodov:**
  - pre polohu ťažiska platí:
    - $$\vec{r}_{1N}^* = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$
- **tuhé teleso:**
  - pre polohu ťažiska platí:
    - $$\vec{r}^* = \frac{\int_V \vec{r} \cdot dm}{\int_V dm} = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} \cdot dm$$
  - pre súradnice ťažiska platí:
    - $$x = \frac{1}{m} \int_V x \cdot dm, \quad y = \frac{1}{m} \int_V y \cdot dm, \quad z = \frac{1}{m} \int_V z \cdot dm$$
  - hmotnostný element môžeme vyjadriť  $dm = \rho \cdot dV$ , hustota telesa nemusí byť konštantná



## 2.2 moment zotrvačnosti

### - jeden hmotný bod:

- o hmotný bod má pri rotácii kinetickú energiu, pre ktorú platí:

$$\bullet E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$$

- o pre moment zotrvačnosti platí:

$$\bullet J = mr^2, [J] = \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

### - sústava hmotných bodov:

- o sústava hmotných bodov má kinetickú energiu

$$\bullet \sum_{i=1}^n E_{Ki} = \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2 + \dots + \frac{1}{2}m_nr_n^2\omega^2 = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots + m_nr_n^2)\omega^2$$

- o moment zotrvačnosti

$$\bullet J = J_1 + J_2 + \dots + J_n = \sum_{i=1}^n J_i = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

### - tuhé teleso:

- o pre moment zotrvačnosti telesa platí:

$$\bullet J = \int_V r^2 \cdot dm = \int_V \rho r^2 \cdot dV$$

- o momenty zotrvačnosti niektorých telies vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom:

$$\bullet \text{guľa: } \frac{2}{5}Mr^2$$

$$\bullet \text{valec: } \frac{1}{2}Mr^2$$

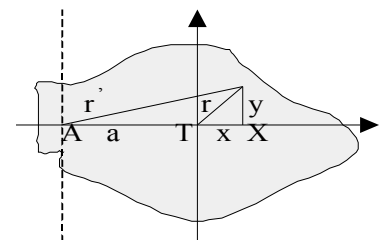
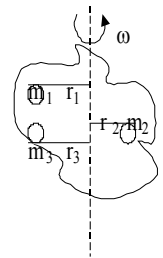
$$\bullet \text{tyč: } \frac{1}{12}Ml^2$$

### - Steinerova veta:

- o ak moment zotrvačnosti tuhého telesa vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom je  $J^* = \int_V r^2 \cdot dm$ , potom moment zotrvačnosti vzhľadom na každú os, ktorá je rovnobežná s osou prechádzajúcou ťažiskom (vzdialenosť osí je  $a$ ), je daná vzťahom:

$$\bullet J = \int r^2 \cdot dm = \int [(a+x)^2 + y^2] dm = \int a^2 \cdot dm + \int \overbrace{2ax}^{\text{súťažiska}} \cdot dm + \int \overbrace{(x^2 + y^2)}^{r^2} \cdot dm \Rightarrow$$

$$\bullet J = a^2 \int dm + \int r^2 \cdot dm = J^* + Ma^2$$



## 2.3 kinetická energia telesa

- ak teleso koná posuvný pohyb, má kinetickú energiu

$$\circ E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

- ak teleso koná rotačný pohyb, má kinetickú energiu

$$\circ E_K = \frac{1}{2}J\omega^2$$

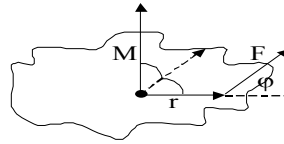
- ak teleso koná posuvný aj rotačný pohyb súčasne, má kinetickú energiu

$$\circ E_K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

## 2.4 moment sily a momentová veta

### 2.4.1 moment sily

- charakterizuje otáčavý účinok sily na teleso otáčania vzhľadom na os
- **platí:**
  - $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
- **veľkosť momentu sily:**
  - $|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha$ ,  $[M] = N.m$
- **smer momentu sily:**
  - $\vec{M} \perp \vec{r} \wedge \vec{M} \perp \vec{F}$
  - orientáciu momentu sily určujeme podľa **pravidla pravej ruky:**
    - keď položíme pravú ruku tak, aby prsty ukazovali prechod od prvého vektora k druhému, odchýlený palec ukazuje smer momentu sily
- keď na tuhé teleso otáčavé okolo nehybnej osi pôsobí súčasne viac síl, účinok týchto síl na teleso môžeme určiť z výsledného momentu síl, ktorý je daný vektorovým súčtom momentov jednotlivých síl (vzhľadom na danú os):
  - $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n$



### 2.4.2 momentová veta

- otáčavý účinok síl pôsobiacich na tuhé teleso otáčavé okolo nehybnej osi sa ruší, ak vektorový súčet momentov všetkých síl vzhľadom na os je nulový vektor momentu sily
  - $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \vec{0}$

## 2.5 prvá veta impulzová

- máme teleso zložené z  $n$  hmotných bodov, vyberieme si  $i$ -tý hmotný bod, na ktorý pôsobia sily (pohybová rovnica jedného hmotného bodu):
  - $\vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ji} = m_i \cdot \vec{a}_i$ 
    - $\vec{F}_i$  je vonkajšia sila
    - $\sum_{j=1}^n \vec{F}_{ji}$  sú vnútorné sily, ktorými pôsobia hmotné body telesa na  $i$ -tý hmotný bod
- pre sústavu hmotných bodov platí pohybová rovnica v tvare:
  - $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{a}_i$
- môžeme vytvoriť dvojice rovnako veľkých síl opačného smeru, ktoré sa navzájom rušia:
  - $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \Rightarrow \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0}$
- platí:
  - $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \overbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ji}}^{\vec{0}} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$
  - $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
  - je to **prvá veta impulzová:**

- vektorový súčet pôsobiacich vonkajších síl sa rovná časovej zmene celkovej hybnosti hmotných bodov
- ak  $\vec{F} = 0$ , platí **zákon zachovania hybnosti**:
  - $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \text{konšt.}$

## 2.6 druhá veta impulzová

- máme teleso zložené z  $n$  hmotných bodov, vyberieme si  $i$ -tý hmotný bod, na ktorý pôsobia sily (pohybová rovnica jedného hmotného bodu):

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ji} = m_i \cdot \vec{a}_i$$

- ak rovnicu vynásobíme polohovým vektorom pôsobiacich síl, platí:

$$\vec{r}_i \times \left( \vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ji} \right) = \vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \frac{d}{dt} \vec{r}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} \vec{p}_i \Rightarrow \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} \vec{p}_i = \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) - \frac{d}{dt} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

rýchlosť a hybnosť majú rovnaký smer  
vektorový súčin rovnobežných vektorov sa rovná 0

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \overbrace{(\vec{r}_i \times \vec{p}_i)}^{\vec{L}_i} - \underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i}_{\vec{v}_i \times \vec{p}_i} = \frac{d}{dt} \vec{L}_i$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \text{ je } \mathbf{moment\ hybnosti}$$

- ak máme sústavu hmotných bodov, platí:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_{i=1}^n \overbrace{\left( \vec{r}_i \times \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ji} \right)}^0 = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt}$$

- môžeme zostaviť dvojice rovnako veľkých momentov síl opačného smeru, ktoré sa navzájom rušia:

$$\vec{M}_{ij} = -\vec{M}_{ji} \Rightarrow \vec{M}_{ij} + \vec{M}_{ji} = \vec{0}$$

- platí:

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{L}_i \Rightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

- je to **druhá veta impulzová**:

- vektorový súčet momentov síl sa rovná časovej zmene momentu hybnosti

- ak  $\vec{M} = 0$ , platí **zákon zachovania momentu hybnosti**:

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n = \text{konšt.}$$

- pri rotácii platí zákon zachovania momentu hybnosti, ktorého veľkosť môžeme vyjadriť:

$$L = p \cdot r = mvr = mr^2 \omega = J\omega$$

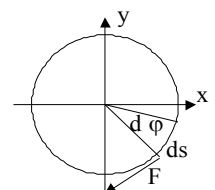
## 2.7 pohybová rovnica rotujúceho telesa

- ak na teleso pôsobí sila, tak pri malom posune vykoná prácu:

$$dW = F \cdot ds = Fr \cdot d\varphi = M \cdot d\varphi$$

- vykonaná práca spôsobí zmenu kinetickej energie:

$$dE = d\left(\frac{1}{2} J\omega^2\right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J\omega^2\right) dt = \frac{1}{2} J \frac{d}{dt} (\omega^2) dt = \frac{1}{2} J 2\omega \frac{d\omega}{dt} dt = J\omega \varepsilon \cdot dt = J\varepsilon \cdot d\varphi$$



- platí:
  - $dW = dE \Rightarrow M \cdot d\varphi = J\varepsilon \cdot d\varphi$
- pohybová rovnica má tvar:
  - $M = J\varepsilon$

## 2.8 porovnanie posuvného a otáčavého pohybu

- porovnaním fyzikálnych vzťahov medzi veličinami, ktoré charakterizujú pohyb hmotného bodu (posuvný pohyb tuhého telesa) a otáčavý pohyb tuhého telesa okolo nehybnej voľnej osi, možno dospieť k istým analógiám; pri otáčavom pohybe tuhých telies sa v príslušných vzťahoch vyskytuje namiesto dráhy uhol otočenia, namiesto rýchlosti uhlová rýchlosť, namiesto hmotnosti moment zotrvačnosti, namiesto sily moment sily

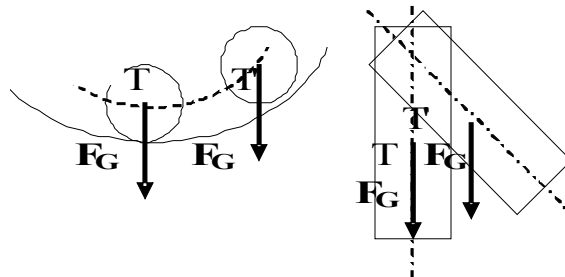
Posuvný pohyb		Otáčavý pohyb	
dráha	$s$	uhol otočenia	$\varphi$
rýchlosť	$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	uhlová rýchlosť	$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$
sila	$F$	moment sily	$M$
hmotnosť	$m$	moment zotrvačnosti	$J$
kinetická energia	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	kinetická energia	$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$

## 2.9 rovnovážna poloha telesa

- tuhé teleso je v rovnovážnej polohe, ak vektorové súčty všetkých síl a všetkých momentov síl, ktoré na teleso pôsobia, sú nulové vektory a teleso je v pokoji

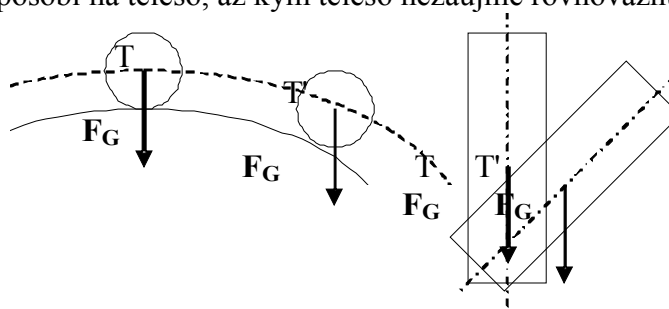
### 2.9.1 stála (stabilná) poloha

- teleso po vychýlení z rovnovážnej polohy sa pôsobením momentu tiažovej sily vracia späť do rovnovážnej polohy, v ktorej je ťažisko telesa najnižšie, teda teleso má najmenšiu potenciálnu energiu



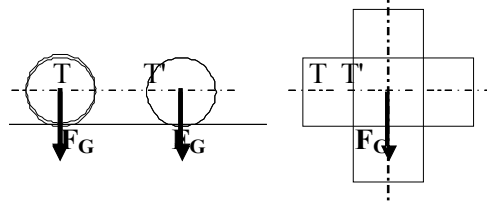
### 2.9.2 vratká (labilná) poloha

- po vychýlení sa teleso samovoľne nevráti do tejto polohy; ťažisko je najvyššie, teda teleso má najväčšiu potenciálnu energiu
- moment tiažovej sily pôsobí na teleso, až kým teleso nezaujme rovnovážnu polohu stálu



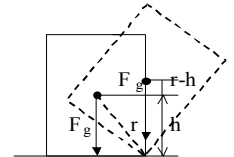
### 2.9.3 voľná (indiferentná) poloha

- teleso po vychýlení zostáva v rovnovážnej polohe, ťažisko zostáva v rovnakej výške,  $E_p$  sa nemení



### 2.9.4 stabilita telesa

- stálosť rovnovážnej polohy podopreného telesa (stabilita telesa) sa meria veľkosťou práce, ktorú musíme vykonať, aby sme teleso prevrátili z rovnovážnej polohy stálej do rovnovážnej polohy vratkej
- stabilita telesa je tým väčšia, čím väčšiu prácu treba vykonať na preklopenie telesa do vratkej polohy
- ťažisko vystúpi o výšku  $r-h$ , kde  $r$  je vzdialenosť od hrany, okolo ktorej teleso preklápame
  - o  $W = F_g(r-h)$

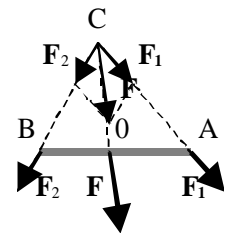


### 2.10 skladanie síl pôsobiacich na tuhé teleso

- skladať sily pôsobiace na tuhé teleso znamená určiť silu, ktorá má na dané teleso účinok ako sily, ktoré skladáme

#### 2.10.1 rôznobežné sily

- keď pôsobia dve rôznobežné sily v bodoch A, B, posunieme ich po ich vektorových priamkach do spoločného pôsobiska v bode C. Doplnením na rovnobežník získame výslednicu, ktorú posunieme po jej vektorovej priamke na spojnicu bodov A, B

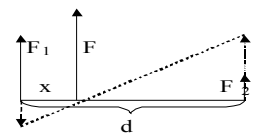


#### 2.10.2 rovnobežné sily

- **dve sily rovnakého smeru:**

- o pôsobisko sily leží vnútri spojnice síl  $F_1$ ,  $F_2$ , výsledná sila je súčtom pôsobiacich síl
- o platí:

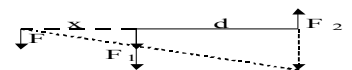
$$\bullet -x F_1 + (d-x) F_2 = 0 \Rightarrow x = \frac{d F_2}{F_1 + F_2}$$



- **dve sily opačného smeru**

- o pôsobisko sily leží na predĺženej spojnici síl  $F_1$ ,  $F_2$ , má smer väčšej sily, jej veľkosť sa rovná absolútnej hodnote rozdielu veľkosti oboch zložiek
- o platí:

$$\bullet (x+d) F_2 - x F_1 = 0 \Rightarrow x = \frac{d F_2}{F_1 - F_2}$$



- **dvojica síl:**

- o dve rovnako veľké rovnobežné sily opačného smeru, ktoré neležia v jednej priamke, nazývame **dvojica síl**. Výslednica týchto síl je nulová; účinok síl na tuhé teleso nemôžeme nahradiť účinkom jednej sily
- o veľkosť momentu dvojice síl sa vždy rovná súčinu veľkosti jednej sily  $F$  a ramena dvojice  $d$ . Ramenom nazývame kolmú vzdialenosť vektorových priamok síl dvojice.

$$\bullet M = M_F + M_{F'} = F(d-x) + F \cdot x = Fd$$

