

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

## PRAKTIKUM I

Úloha č.: .....III.....

Název: Štúdium prúdenia viskózne kvapaliny trubicami kruhového prierezu

Vypracoval:.... **Viktor Babjak** ... stud. sk. .. F 11 .. dne..... 12. 5. 2005 ....

Odevzdal dne: ..... vráceno: .....

Odevzdal dne: ..... vráceno: .....

Odevzdal dne: .....

Posuzoval: **Javorský**.....dne ..... výsledek klasifikace .....**1**.....

Připomínky:

**žiadne**

### Pracovné úlohy:

1. Pre tri vodorovné trubice s rôznymi polomerami kruhového prierezu, ktoré obsahujú manometre, zmerajte závislosť objemového toku  $Q_V$  na úbytku statického tlaku  $\Delta p$  na vyšetrovanej dĺžke trubice  $l$  v smere prúdenia.
2. Zostrojte grafy závislostí  $Q_V = Q_V(p)$ . Do grafu nakreslite takisto teoretické krivky tejto závislosti plynúce z Poiseuilleovej rovnice.
3. Zostrojte graf závislosti  $k = k(Re)$ , kde  $k$  je súčiniteľ odporu trubice a  $Re$  je Reynoldsovo číslo.

### Teoretická časť:

Na meranie použijeme sklenenú trubicu; na jednom konci je pripojený prívod vody. Vo vzdialenosti  $l$  od voľného konca je pripevnená manometrická trubica, pomocou ktorej budeme merať tlak. Úbytok statického tlaku  $\Delta p$  na dĺžke  $l$  je úmerný výške  $h$  vodného stĺpca v manometrickej trubici

$$\Delta p = h \rho g, \quad (1)$$

kde  $\rho$  je hustota vody a  $g$  je miestne tiažové zrýchlenie.

Voda z trubice vyteká do odmerného valca, v ktorom sa meria objem vody, ktorý pritečie za daný časový interval  $t$ . Objemový tok určíme podľa

$$Q_V = \frac{V}{t}. \quad (2)$$

Prúdenie je charakterizované Reynoldsovým číslom  $Re$

$$Re = \frac{r r v_s}{h}, \quad (3)$$

kde  $r$  je vnútorný polomer trubice,  $v_s$  stredná rýchlosť prúdenia a  $\eta$  je dynamická viskozita vody. Ak je  $Re$  menšie ako určitá kritická hranica (približne v oblasti  $1000 < Re < 2000$ ), je prúdenie laminárne a platí Poiseuillova rovnica

$$Q_V = \frac{p r^4}{8 h l} \Delta p. \quad (4)$$

Pri laminárnom prúdení je závislosť  $Q_V(\Delta p)$  je lineárna, po prekročení kritickej hodnoty Reynoldsovho čísla je prúdenie v trubici nestabilné a namerané hodnoty majú značný rozptyl. Pre ešte väčšie hodnoty Reynoldsovho čísla je prúdenie trvale turbulentné. Závislosť  $Q_V = Q_V(p)$  sa odkloní od pôvodnej priamky.

Ak zavedieme súčiniteľ odporu trubice  $k$ , môžeme úbytok statického tlaku na dĺžke  $l$  vyjadriť vzťahom

$$\Delta p = k \frac{l}{2r} r v_s^2. \quad (5)$$

Pre objemový tok  $Q_V$  platí

$$Q_V = p r^2 v_s. \quad (6)$$

Pre laminárne prúdenie platí

$$k = \frac{16}{Re}. \quad (7)$$

Experimentálne zistená závislosť  $k(Re)$  je pre turbulentné prúdenie zložitejšia. Pre trubice s hladkými stenami sa udáva vzorec, vid' [2]

$$k \approx \frac{0,133}{\sqrt[4]{Re}}. \quad (8)$$

Pre  $k$  a  $Re$  vyjadrené pomocou známych a meraných veličín platí

$$k = 2p^2 \frac{r^5 \Delta p}{rlQ_v^2} \quad (9)$$

$$Re = \frac{rQ_v}{phr} \quad (10)$$

Experimentálne zistené údaje pre trubice s rôznymi priermi a rôznych dĺžok môžeme spracovať do jedného grafu. V oblasti laminárneho prúdenia by zodpovedajúce si body pre rôzne polomery trubice mali byť rozložené podľa teoretickej závislosti danej rovnicou (7).

### Podmienky merania:

Podmienky merania boli určené pomocou digitálneho meracieho prístroja:

- teplota:  $t = (24,3 \pm 0,1)^\circ C$
- atmosféricky tlak:  $p = (9,789 \pm 0,005) \cdot 10^4 Pa$
- vlhkosť vzduchu:  $(35,4 \pm 0,1)\%$

### Výsledky merania:

Priemery jednotlivých trubíc som určoval pomocou posuvného meradla s chybou 0,1 mm. Pre každú trubicu som urobil 5 meraní (v rôznych smeroch). Výsledná hodnota je ich aritmetickým priemerom. Chybu určenia polomerov trubíc určíme ako kvadratický priemer smerodajnej odchýlky aritmetického priemeru hodnôt  $\sigma_{stat}$  a chyby posuvného meradla  $\sigma_{mer}$  ( $\sigma_{stat}$  je zanedbateľné voči  $\sigma_{mer}$ ).

Tabuľka 1 – Priemery trubíc

	trubica 1	trubica 2	trubica 3
	$d_1 [mm]$	$d_2 [mm]$	$d_3 [mm]$
1	3,2	2,2	2,8
2	3,3	2,2	3,0
3	3,4	2,3	2,9
4	3,3	2,3	2,9
5	3,3	2,2	2,9
$\mu [mm]$	3,30	2,24	2,90
$\sigma_{stat} [mm]$	0,03	0,02	0,03

Priemery trubíc:

- $d_1 = (3,30 \pm 0,10)mm$   $h_{d_1} = 3,0 \cdot 10^{-2}$
- $d_2 = (2,24 \pm 0,10)mm$   $h_{d_2} = 4,5 \cdot 10^{-2}$
- $d_3 = (2,90 \pm 0,10)mm$   $h_{d_3} = 3,4 \cdot 10^{-2}$

Dĺžku  $l$  (vzdialenosť od stredu manometrickej trubice po koniec trubice, ktorým vytekala voda) som určoval pomocou pásového meradla, pričom chybu určenia  $l$  odhadnem na 1 mm.

- $l_1 = (19,6 \pm 0,1)cm$   $h_{l_1} = 5,1 \cdot 10^{-3}$
- $l_2 = (25,0 \pm 0,1)cm$   $h_{l_2} = 4,0 \cdot 10^{-3}$
- $l_3 = (25,0 \pm 0,1)cm$   $h_{l_3} = 4,0 \cdot 10^{-3}$

V nádobe, do ktorej odtekala voda, určil som teplotu vody.

- $t = (19 \pm 1)^\circ C$   $h_t = 5,3 \cdot 10^{-2}$

Tejto teplote zodpovedá hustota vody  $\rho$ , vid' [5] a dynamická viskozita  $\eta$ , vid' [6]

- $r = 998 kg.m^{-3}$

- $h = 1,002 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$  pri teplote  $20\text{ }^{\circ}C$

Výšku vody v manometrickej trubici som určoval tým, že som reguloval tok vody v trubici. Pri každom meraní som určil výšku vody v manometrickej trubici (najmenší dielik na manometri bol  $1\text{ mm}$ , t.j. aj chybu určenia  $h$  odhadneme na  $1\text{ mm}$ ). Pri zmene laminárneho prúdenia na turbulentné výška vody v manometrickej trubici kmitala, a tak v tabuľke sú uvedené stredné hodnoty počas merania (v niektorých prípadoch boli výkyvy veľmi veľké, a preto bolo zložité určiť strednú hodnotu). Pri turbulentnom prúdení výkyvy hladiny už boli menšie ako v prechodovej oblasti. Potom som zachytával vytekajúcu vodu do kadičky a zároveň meral čas. Objem zachytenej kvapaliny som určoval podľa daného toku, chyba určenia objemu je  $1\text{ mm}$ . Čas som meral na ručných stopkách s dielikom  $0,2\text{ s}$ , t.j. aj chybu určenia  $t$  uvažujeme  $0,2\text{ s}$ .

Tabuľka 2 – Namerané a vypočítané hodnoty pre trubicu 1

$h$	$V$	$t$	$\Delta p$	$S_{\Delta p}$	$Q_V$	$S_{Q_V}$	$k$	$\Delta k$	$Re$	$\Delta Re$
[mm]	[ml]	[s]	[Pa]	[Pa]	[ml.s <sup>-1</sup> ]	[ml.s <sup>-1</sup> ]				
12	4,5	12,8	117	10	0,352	0,084	1,165	0,836	68	18
21	34	14,4	206	10	2,361	0,102	0,046	0,013	454	33
30	35	10,8	294	10	3,241	0,153	0,035	0,010	623	48
40	47	9,8	391	10	4,796	0,200	0,021	0,006	922	66
50	80	13,4	489	10	5,970	0,164	0,017	0,004	1147	66
59	72	11,0	577	10	6,545	0,210	0,017	0,004	1258	78
75	86	12,2	734	10	7,049	0,198	0,018	0,004	1354	79
83	87	12,4	812	10	7,016	0,194	0,020	0,004	1348	78
102	91	11,8	998	10	7,712	0,215	0,021	0,005	1482	86
108	110	13,8	1057	10	7,971	0,188	0,021	0,004	1532	82
118	126	14,8	1155	10	8,514	0,183	0,020	0,004	1636	84
125	122	14,0	1223	10	8,714	0,196	0,020	0,004	1674	88

Tabuľka 3 – Namerané a vypočítané hodnoty pre trubicu 2

$h$	$V$	$t$	$\Delta p$	$S_{\Delta p}$	$Q_V$	$S_{Q_V}$	$k$	$\Delta k$	$Re$	$\Delta Re$
[mm]	[ml]	[s]	[Pa]	[Pa]	[ml.s <sup>-1</sup> ]	[ml.s <sup>-1</sup> ]				
9	1,4	31,6	88	10	0,044	0,032	6,338	11,391	12	9
21	3,2	16,2	206	10	0,198	0,064	0,733	0,677	56	21
31	4,2	11,0	303	10	0,382	0,098	0,290	0,225	108	33
41	12	30,0	401	10	0,400	0,036	0,349	0,151	113	15
53	18	20,8	519	10	0,865	0,056	0,097	0,037	245	27
64	21	19,8	626	10	1,061	0,061	0,078	0,028	300	31
77	25	18,4	754	10	1,359	0,069	0,057	0,020	385	37
88	31	19,6	861	10	1,582	0,067	0,048	0,016	448	39
98	36	20,0	959	10	1,800	0,068	0,041	0,013	510	42
109	39	19,8	1067	10	1,970	0,070	0,038	0,012	558	45
121	44	20,0	1184	10	2,200	0,072	0,034	0,010	623	48
132	43	17,8	1292	10	2,416	0,083	0,031	0,009	684	54
142	41	16,0	1390	10	2,563	0,095	0,030	0,009	726	60
152	53	19,0	1488	10	2,789	0,082	0,027	0,008	789	59
163	56	19,0	1595	10	2,947	0,084	0,026	0,008	834	61
175	59	18,9	1713	10	3,122	0,086	0,025	0,007	884	64

Tabuľka 4 – Namerané a vypočítané hodnoty pre trubicu 3

$h$	$V$	$t$	$\Delta p$	$S_{\Delta p}$	$Q_v$	$S_{Q_v}$	$k$	$\Delta k$	$Re$	$\Delta Re$
[mm]	[ml]	[s]	[Pa]	[Pa]	[ml.s <sup>-1</sup> ]	[ml.s <sup>-1</sup> ]				
39	24	13,6	382	10	1,765	0,099	0,062	0,019	386	35
50	33	12,4	489	10	2,661	0,124	0,035	0,010	582	47
60	35	10,8	587	10	3,241	0,153	0,028	0,008	709	58
70	42	11,2	685	10	3,750	0,156	0,025	0,007	820	62
80	37	8,6	783	10	4,302	0,216	0,021	0,006	941	79
90	56	11,4	881	10	4,912	0,174	0,019	0,005	1074	75
100	57	10,8	979	10	5,278	0,190	0,018	0,005	1154	81
110	67	11,8	1077	10	5,678	0,181	0,017	0,004	1241	82
120	62	10,0	1174	10	6,200	0,224	0,015	0,004	1356	95
165	80	11,6	1615	10	6,897	0,205	0,017	0,004	1508	96
200	78	10,8	1957	10	7,222	0,226	0,019	0,005	1579	103
211	78	10,2	2065	10	7,647	0,248	0,018	0,004	1672	111
223	88	11,4	2183	10	7,719	0,223	0,019	0,004	1688	106
227	91	11,6	2222	10	7,845	0,221	0,018	0,004	1715	107
242	84	10,8	2368	10	7,778	0,237	0,020	0,005	1701	110
256	92	11,2	2505	10	8,214	0,236	0,019	0,004	1796	113
268	122	15,0	2623	10	8,133	0,175	0,020	0,004	1778	99

Pretlak  $\Delta p$  určíme podľa (1). Relatívna chyba  $\Delta p$  je taká istá ako relatívna chyba  $h$  ( $h_{\Delta p} = h_h$ ), t.j. na základe  $h_h$  určíme absolútnu chybu pretlaku  $\Delta p$ . Objemový tok určíme podľa (2). Chybu objemového toku určíme z lineárneho zákona prenosu chýb, vid' [3] – relatívna chyba podielu dvoch veličín sa rovná súčtu relatívnych chýb jednotlivých veličín  $h_{Q_v} = h_v + h_t$ . Súčiniteľ odporu trubice určíme podľa (9). Chybu  $k$  určíme z lineárneho zákona prenosu chýb, t.j. pre relatívnu chybu  $k$  platí  $h_k = 5h_r + h_{\Delta p} + h_l + 2h_{Q_v}$ . Reynoldsovo číslo určíme podľa (10). Chybu  $Re$  takisto určíme z lineárneho zákona prenosu chýb, t.j. platí  $h_{Re} = h_{Q_v} + h_r$ . Na základe relatívnych chýb určíme absolútne chyby jednotlivých veličín.

Závislosť objemového toku na úbytku statického tlaku  $Q_v = Q_v(p)$  je jednotlivé trubice je znázornená v grafoch 1 – 3. V jednotlivých grafoch sú znázornené aj chybové úsečky zodpovedajúce úbytku statického tlaku a objemového toku. V grafoch je znázornená aj teoretická závislosť plynuca z Poiseuilovej rovnice, ktorá je lineárna (platí pre laminárne prúdenie). Pre smernice jednotlivých priamok platí (relatívnu chybu jednotlivých smerníc určíme z lineárneho zákona prenosu chýb, t.j.  $h_{s_i} = 4h_{r_i} + h_{l_i}$ )

- $s_1 = (14,8 \pm 1,9) \cdot 10^{-9} m^3 Pa^{-1} s^{-1}$
- $s_2 = (2,5 \pm 0,5) \cdot 10^{-9} m^3 Pa^{-1} s^{-1}$
- $s_3 = (6,9 \pm 1,0) \cdot 10^{-9} m^3 Pa^{-1} s^{-1}$

V grafe 4 je znázornená závislosť súčiniteľa odporu trubice  $k$  na Reynoldsovom čísle  $Re$  pre všetky trubice. V grafe sú znázornené aj chybové úsečky dané chybami uvedenými v tabuľkách, teoretická závislosť pre laminárne prúdenie a experimentálne zistená závislosť pre turbulентné prúdenie.

## Diskusia výsledkov:

Namerané závislosti objemového toku  $Q_V$  na úbytku statického tlaku  $\Delta p$  na vyšetrovanej dĺžke trubice  $l$  v smere prúdenia v oblasti laminárneho prúdenia sú systematicky posunuté voči teoretickým krivkám vyplývajúcim z Poiseullovej rovnice (namerané hodnoty ležia pod teoretickými priamkami). Systematický posun má pravdepodobne pôvod v tom, že tlakové pomery v okolí manometrickej trubice sú zložité a trubica neukazuje úbytok tlaku presne. Teoretická závislosť (Poiseullova rovnica) je zaťažená veľkou chybou, lebo vo vzťahu (4) vystupuje polomer trubice vo štvrtej mocnine (určenie polomeru trubice je takisto zaťažené veľkou chybou, ktorá je spôsobená metódou merania). Chyba merania doby výtoku vody je spôsobená reakčnou dobou experimentátora.

Laminárne prúdenie sa mení na turbulentné pri hodnote Reynoldsovho čísla asi 1200, čo sa v jednotlivých grafoch prejavuje odklonom nameraných hodnôt od teoretickej priamky pre laminárne prúdenie. Tento prechod je najlepšie vidieť v *grafe 3* pre trubicu 3. Pri zmene laminárneho prúdenia na turbulentné sa rýchlo menila výška vodného stĺpca v manometrickej trubici (tieto oscilácie sú spôsobené tým, že prechod k turbulentnému prúdeniu neprebíha plynulo, ale v trubici sa vyskytujú oblasti s čisto laminárnym alebo turbulentným prúdením). Pre trubicu 2, ktorá má najmenší polomer, som nameril len laminárne prúdenie (zmena na turbulentné prúdenie pri prietoku, ktorý sa pri danom experimente dá dosiahnuť, nenastala), vid' *graf 2*. Pri hodnote Reynoldsovho čísla asi 1800 sa prúdenie stáva trvale turbulentným a strmosť krivky opäť rastie, vidno to v *grafe 1* (prejavuje sa to aj menšími výkyvmi hladiny vody v manometrickej trubici).

Závislosť súčiniteľa odporu trubice  $k$  na Reynoldsovom čísle  $Re$  je znázornená v *grafe 4*. Veľká chyba  $k$  (hlavne pri nižšej hodnote Reynoldsovho čísla) je spôsobená tým, že v (9) sa polomer trubice vyskytuje v piatej mocnine. Približne pri hodnote  $Re = 1200$  sa namerané hodnoty odkláňajú od teoretickej závislosti (7) pre laminárne prúdenie.

## Záver:

Pre tri vodorovné trubice kruhového prierezu s rôznymi polormi som určil závislosť objemového toku  $Q_V$  na úbytku statického tlaku  $\Delta p$  na vyšetrovanej dĺžke trubice  $l$  v smere prúdenia. Tieto závislosti sú pre jednotlivé trubice znázornené v *grafoch 1 – 3*.

Závislosť súčiniteľa odporu trubice na Reynoldsovom čísle je pre všetky trubice znázornená v *grafe 4*.

## Literatúra:

[1] Brož, J. a kol.: Základy fyzikálních měření I; SPN; Praha 1967

[2] Študijný text z www stránky fyzikálneho praktika MFF UK

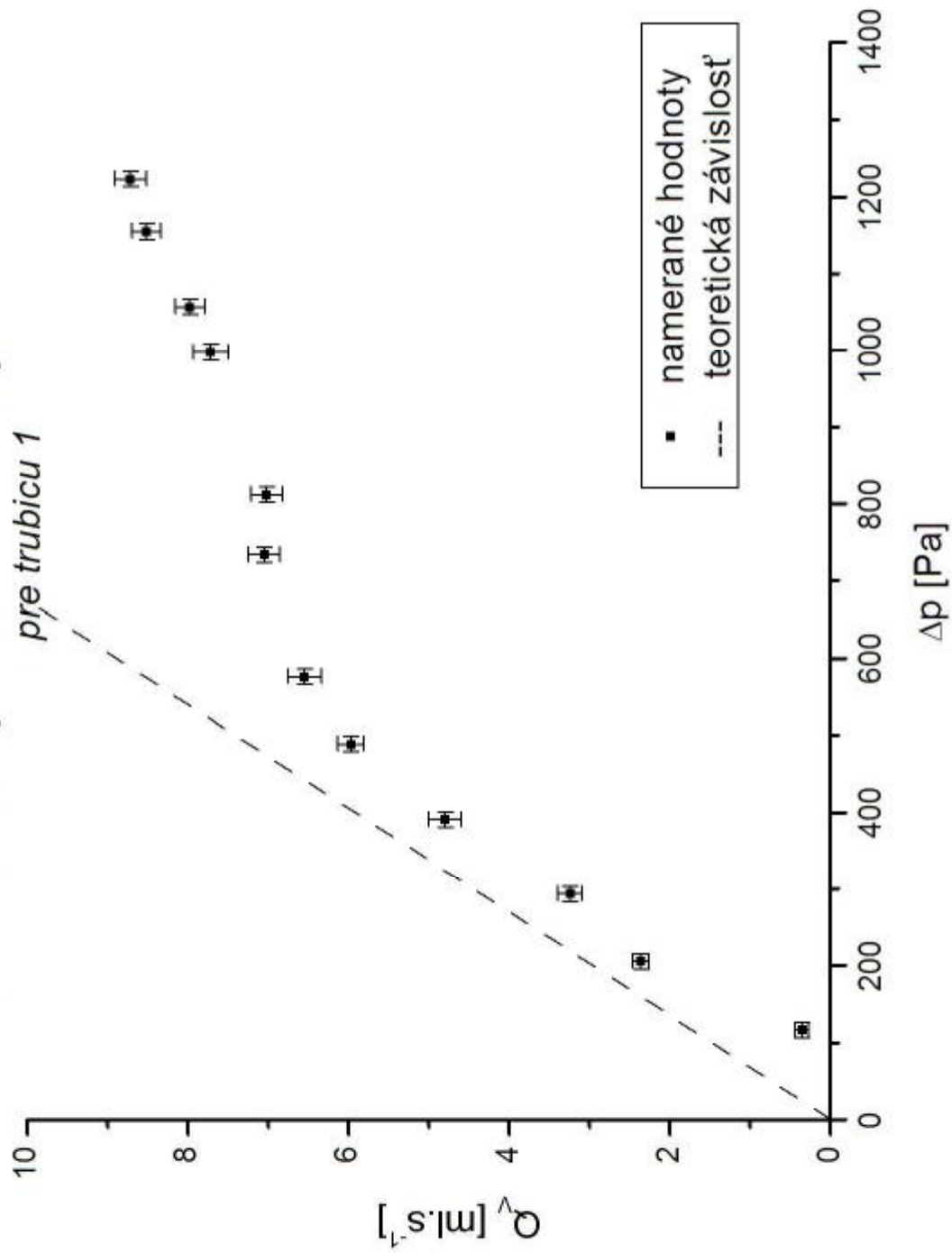
[3] English, J.; Zpracování výsledků fyzikálních měření, LS 1999/2000

[4] Mikulčák, J. a kol.; Matematické, fyzikálne a chemické tabuľky pre SŠ; SPN; Bratislava 2002

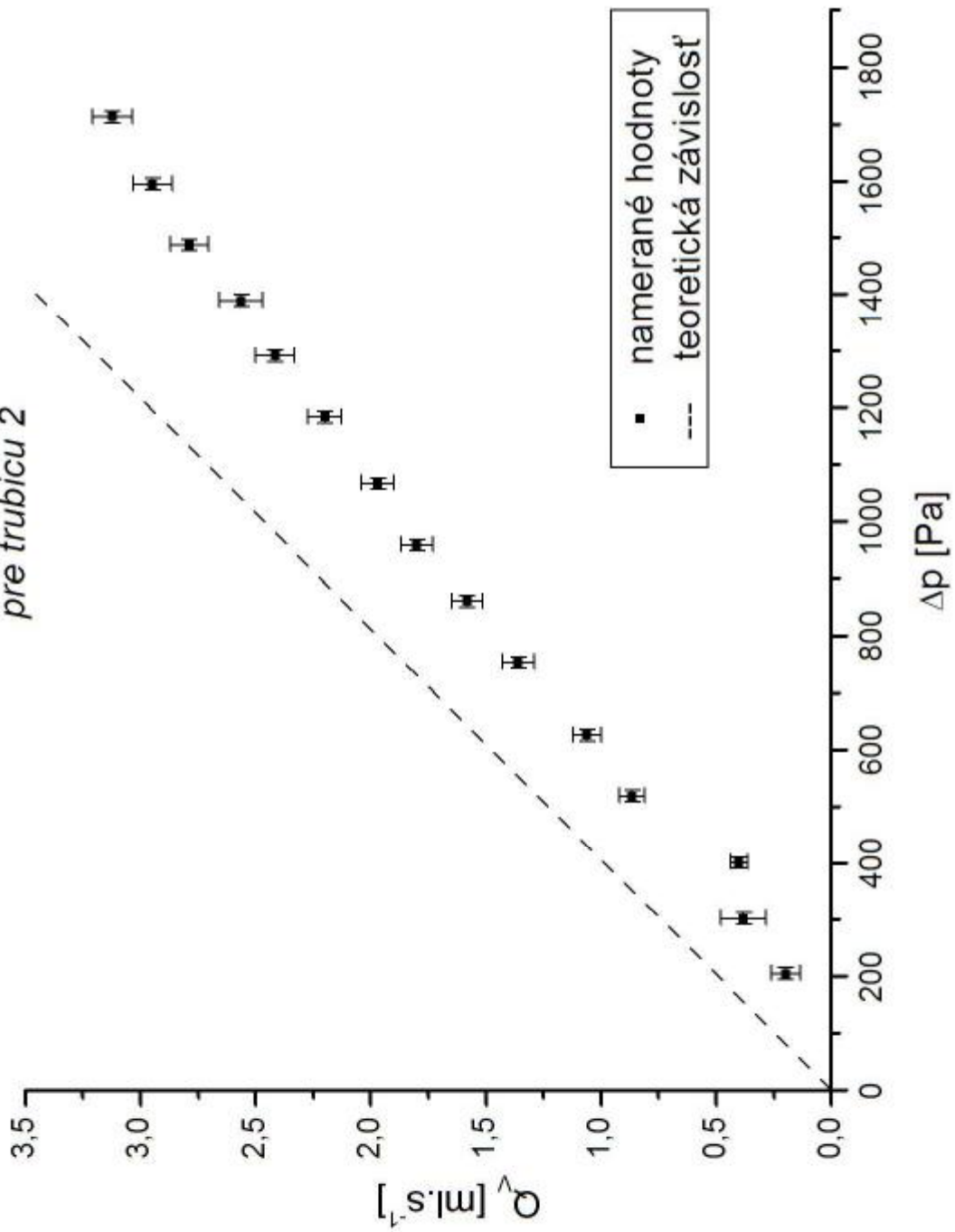
[5] [http://www.simetric.co.uk/si\\_water.htm#tenth](http://www.simetric.co.uk/si_water.htm#tenth)

[6] <http://www.converter.cz/tabulky>

Graf 1 - Závislost objemového toku na úbytku statického tlaku  
pre trubicu 1

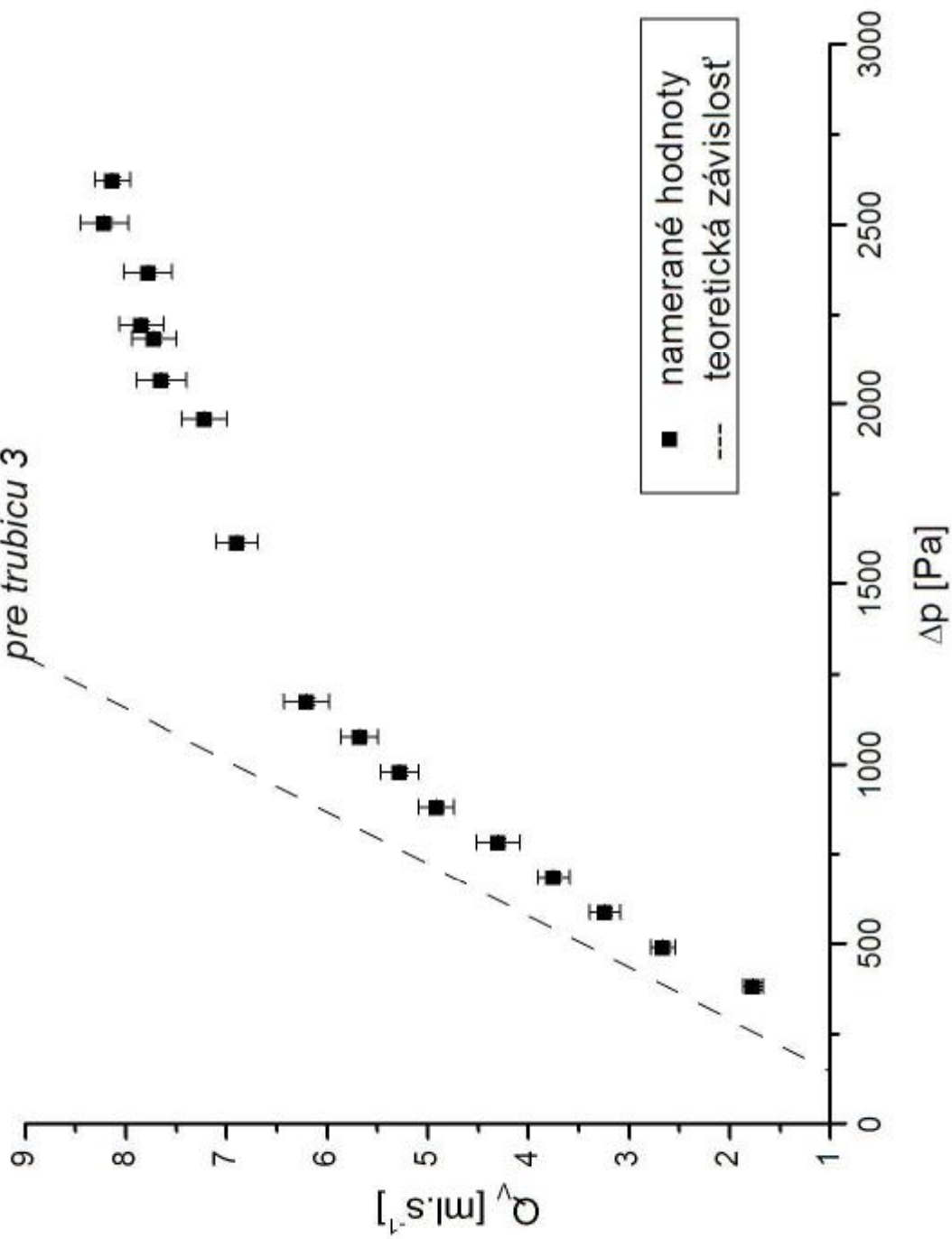


Graf 2 - Závislosť objemového toku na úbytku statického tlaku pre trubicu 2





Graf 3 - Závislost' objemového toku na úbytku statického tlaku  
pre trubicu 3



Garf 4 - Závislosť súčiniteľa odporu trubice k na Reynoldsovom čísle Re

