

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM I

Úloha č.:VII.....

Název:.....Štúdium kmitov viazaných oscilátorov

Vypracoval:.... **Viktor Babjak** ... stud. sk. .. F 11 .. dne... 21. 3. 2005

Odevzdal dne: vráceno:

Odevzdal dne: vráceno:

Odevzdal dne:

Posuzoval: **Fähnirich**.....dne výsledek klasifikace**2**.....

Připomínky:

Reakčná doba experimentátora: "Na základe čoho? A ako, potom vysvetlite, že sa namerané hodnoty (opakovane) zhodujú omnoho presnejšie???"

Vo výsledkoch merania pri úlohe 2 je uvedené: "A prečo myslíte, že sa meranie môže opakovať - keď si poviete, že hodnoty nemôžeme zmerať presnejšie ako na 0,2 s, potom je snáď opakovanie a počítanie priemeru celkom zbytočné, nie!!!"

Na konci diskusie pri poslednej vete je napísané: "Ale myslíte, že by to - teoreticky - mal byť takýto polynóm???"

Pri grafe 1 pri kvadratickej interpolácii je napísané: " ALE MYSLÍTE, ŽE takto by skutočne závislosť mala vyzeráť."

Pracovné úlohy:

- Zmerajte dobu kmitu T_0 dvoch rovnakých neviazaných fyzikálnych kyvadiel.
- Zmerajte dobu kmitu T_i dvoch rovnakých fyzikálnych kyvadiel viazaných slabou pružnou väzbou vypustených z pokoja so začiatočnými podmienkami:
 - $y_1 = y_2 = B$ doba kmitu T_1
 - $y_1 = -y_2 = B$ doba kmitu T_2
 - $y_1 = 0; y_2 = B$
 - doba kmitu T_3
 - doba $T_4/2$, za ktorú dôjde k maximálnej výmene energie medzi kyvadlami
- Vypočítajte kruhové frekvencie $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ a ω_4 zodpovedajúce dobám T_0, T_1, T_2, T_3 a T_4 ; meraním overte platnosť vzťahov odvodených pre 3 a 4.
- Vypočítajte stupeň väzby κ .
- Pre jednu pružinu zmerajte závislosť stupňa väzby na vzdialenosti zavesenia pružiny od závesu kyvadla a graficky znázornite.

Teoretická časť:

Majme dva rovnaké fyzikálne kyvadlá viazané slabou pružnou väzbou. Bez väzby vykonávajú obe kyvadlá harmonické kmity s kruhovou frekvenciou ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}}, \quad (1)$$

kde D je direkčný moment a I je moment zotrvačnosti kyvadla.

Väzba spôsobí, že v rovnovážnej polohe sú obe kyvadlá otočené voči vertikálnemu smeru o uhol α proti sebe. Ak vychýlime prvé kyvadlo z rovnovážnej polohy o uhol φ_1 a druhé kyvadlo o uhol φ_2 , pohybové rovnice pre kyvadlo 1 resp. 2 majú tvar

$$\begin{aligned} I\ddot{j}_1 &= -Dj_1 - D^*(j_1 - j_2), \\ I\ddot{j}_2 &= -Dj_2 + D^*(j_1 - j_2) \end{aligned}, \quad (2)$$

kde D je direkčný moment, I moment zotrvačnosti kyvadla a D^* direkčný moment pružiny.

Riešenie pohybových rovníc má tvar

$$\begin{aligned} j_1 &= a_1 \cos w_1 t + b_1 \sin w_1 t + a_2 \cos w_2 t + b_2 \sin w_2 t \\ j_2 &= a_1 \cos w_1 t + b_1 \sin w_1 t - a_2 \cos w_2 t - b_2 \sin w_2 t \end{aligned}, \quad (3)$$

kde $w_1 = \sqrt{\frac{D}{I}}$ a $w_2 = \sqrt{\frac{D+2D^*}{I}}$ sú kruhové frekvencie; a_1, a_2, b_1 a b_2 sú integračné konštanty,

ktoré určíme zo začiatočných podmienok; t je čas.

Ak poznáme dobu kmitu kyvadla, bude kruhová frekvencia daná výrazom

$$w = \frac{2\pi}{T}. \quad (4)$$

1. Začiatočné výchylky sú rovnaké

Začiatočné podmienky majú tvar

$$\begin{aligned} j_1(0) &= j_2(0) = A \\ \dot{j}_1 &= \dot{j}_2 = 0 \end{aligned}, \quad (5)$$

kde A je ľubovoľná konštanta určujúca začiatočnú výchylku.

Z rovníc (3) vyplýva $a_1 = A$ a $a_2 = b_1 = b_2 = 0$, teda

$$j_1 = j_2 = A \cos w_1 t. \quad (6)$$

Obe kyvadlá sa pohybujú tak, ako by väzba medzi nimi nebola realizovaná.

2. *Začiatkové výchylky sú opačne orientované*

Začiatkové podmienky majú tvar

$$\begin{aligned}j_1(0) &= A & j_2(0) &= -A \\ \dot{j}_1 &= \dot{j}_2 = 0\end{aligned}\tag{7}$$

Z pohybových rovníc (3) dostaneme $a_2 = A$ a $a_1 = b_1 = b_2 = 0$, teda

$$j_1 = -j_2 = A \cos \omega_2 t.\tag{8}$$

Obe kyvadla kmitajú s rovnakou amplitúdou a rovnakou frekvenciou ω_2 , ale s fázovým posunom π .

3. *Jedna začiatková výchylka je nulová*

Začiatkové podmienky majú tvar

$$\begin{aligned}j_1(0) &= 0 & j_2(0) &= A \\ \dot{j}_1 &= \dot{j}_2 = 0\end{aligned}\tag{9}$$

Z pohybových rovníc (3) dostaneme $a_1 = -a_2 = \frac{A}{2}$ a $b_1 = b_2 = 0$, teda

$$\begin{aligned}j_1 &= \frac{A}{2}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = A \sin\left[\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t\right] \sin\left[\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t\right] \\ j_2 &= \frac{A}{2}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = A \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t\right]\end{aligned}\tag{10}$$

Ak je väzba slabá, t.j. ω_2 je len o málo väčšie ako ω_1 , môžeme rovnice (10) interpretovať tak, že obe kyvadlá kmitajú s rovnakou frekvenciou.

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\tag{11}$$

a amplitúdy ich pohybu $A \sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t$ resp. $A \cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t$ sa s časom periodicky menia s frekvenciou

$$\omega_4 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}.\tag{12}$$

Stupeň väzby κ je definovaný ako

$$k = \frac{D^*}{D + D^*}.\tag{13}$$

Porovnaním so zavedením kruhových frekvencií ω_1 a ω_2 dostaneme pre stupeň väzby

$$k = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}.\tag{14}$$

Podmienky merania:

Podmienky merania sú určené pomocou digitálneho meracieho prístroja:

- teplota: $t = (25,7 \pm 0,5)^\circ\text{C}$
- vlhkosť vzduchu: $(29,9 \pm 1)\%$

Výsledky merania:

Na meranie periód sme používali stopky riadené sieťovou frekvenciou. Najprv sme pomocou čítača overili, že sieťová frekvencia je 50 Hz, t.j. nie je nutná žiadna korekcia nameraných hodnôt. Dodržiavanie začiatkových podmienok sme zaisťovali pomocou mechanického spúšťacieho zariadenia. Reakčnú chybu experimentátora σ_{exp} odhadneme na 0,2 s.

Vzdialenosť l pružiny od upevnenia závesu sme určovali pomocou pásového meradla. Vzhľadom k tomu, že uchytenie pružiny a polohu miesta závesu nie je možné určiť presne, odhadneme absolútnu chybu veličiny l na $0,3\text{ cm}$.

Úloha 1:

Merali sme dobu desať kmitov $10 T_0$ oboch kyvadiel.

Tabuľka 1 – Doby kmitov dvoch neviazaných kyvadiel

číslo merania n	kyvadlo 1		kyvadlo 2	
	$10 T_0$ [s]	T_0 [s]	$10 T_0'$ [s]	T_0' [s]
1	19,21	1,921	19,17	1,917
2	19,20	1,920	19,20	1,920
3	19,20	1,920	19,18	1,918
4	19,18	1,918	19,16	1,916
5	19,20	1,920	19,19	1,919
μ [s]		1,9198		1,9180
σ_{stat} [s]		0,0005		0,0007

V tabuľke μ znamená aritmetický priemer hodnôt a σ_{stat} smerodajnú odchýlku aritmetického priemeru hodnôt. Absolútnu chybu doby kmitu T_0 určíme ako kvadratický priemer σ_{stat} a chyby experimentátora σ_{exp} vydelení počtom meraných kmitov.

Doba kmitu T_0 kyvadla 1:

$$\bullet T_0 = (1,920 \pm 0,020)s \quad h_{T_0} = 1,0 \cdot 10^{-2}$$

Doba kmitu T_0' kyvadla 2:

$$\bullet T_0' = (1,918 \pm 0,020)s \quad h_{T_0'} = 1,0 \cdot 10^{-2}$$

η je relatívna chyba zadanej veličiny.

Doby kmitu T_0 a T_0' sa v rámci chyby nelíšia, t.j. môžeme ich považovať za rovnaké kyvadlá.

Úloha 2:

Túto úlohu riešime pre vzdialenosť pružiny od upevnenia závesu $l = (36,0 \pm 0,3)\text{cm}$. Pre rovnaké začiatkové podmienky určujeme dobu desiatich kmitov T_1 ; pre opačne orientované začiatkové podmienky určujeme takisto dobu desiatich kmitov T_2 . Ak je jedna začiatková výchylka nulová určujeme pre dlhšiu pružinu tri kmity T_3 a pre kratšiu sedem kmitov T_3 . Pri dobe, za ktorú dôjde k maximálnej výmene energie medzi kyvadlami, určujeme polovicu kmitu T_4 .

Tabuľka 2 – Doby kmitov viazaných oscilátorov pre dlhšiu pružinu

číslo merania n	$10 T_1$ [s]	T_1 [s]	$10 T_2$ [s]	T_2 [s]	$3 T_3$ [s]	T_3 [s]	$T_1/2$ [s]	T_4 [s]
1	19,16	1,916	16,78	1,678	5,36	1,787	13,09	26,18
2	19,13	1,913	16,70	1,670	5,38	1,793	13,05	26,10
3	19,17	1,917	16,71	1,671	5,38	1,793	13,09	26,18
4	19,14	1,914	16,73	1,673	5,37	1,790	13,05	26,10
5	19,20	1,920	16,77	1,677	5,39	1,797	13,06	26,12
μ [s]		1,916		1,674		1,792		26,14
σ_{stat} [s]		0,001		0,002		0,002		0,02

Tabuľka 3 – Doby kmitov viazaných oscilátorov pre kratšiu pružinu

číslo merania n	$10 T_1$ [s]	T_1 [s]	$10 T_2$ [s]	T_2 [s]	$7 T_3$ [s]	T_3 [s]	$T_1/2$ [s]	T_4 [s]
1	19,21	1,921	18,41	1,678	13,07	1,867	43,62	87,24
2	19,15	1,915	18,36	1,670	13,12	1,874	43,62	87,24
3	19,21	1,921	18,38	1,671	13,08	1,869	43,59	87,18
4	19,15	1,915	18,37	1,673	13,14	1,877	43,33	86,66
5	19,22	1,922	18,38	1,677	13,13	1,876	43,37	86,74
μ [s]		1,919		1,8380		1,873		87,01
σ_{stat} [s]		0,002		0,0008		0,002		0,13

V tabuľke μ znamená aritmetický priemer hodnôt a σ_{stat} smerodajnú odchýlku aritmetického priemeru hodnôt. Absolútnu chybu jednotlivých dôb kmitu určíme podobne ako v prvej úlohe.

Dlhšia pružina:

- $T_1 = (1,916 \pm 0,020)s$ $h_{T_1} = 1,0 \cdot 10^{-2}$
- $T_2 = (1,674 \pm 0,020)s$ $h_{T_2} = 1,2 \cdot 10^{-2}$
- $T_3 = (1,792 \pm 0,067)s$ $h_{T_3} = 3,7 \cdot 10^{-2}$
- $T_4 = (26,14 \pm 0,40)s$ $h_{T_4} = 1,5 \cdot 10^{-2}$

Kratšia pružina:

- $T'_1 = (1,919 \pm 0,020)s$ $h_{T'_1} = 1,0 \cdot 10^{-2}$
- $T'_2 = (1,838 \pm 0,020)s$ $h_{T'_2} = 1,1 \cdot 10^{-2}$
- $T'_3 = (1,873 \pm 0,029)s$ $h_{T'_3} = 1,5 \cdot 10^{-2}$
- $T'_4 = (87,01 \pm 0,42)s$ $h_{T'_4} = 4,8 \cdot 10^{-3}$

Úloha 3:

Kruhové frekvencie zodpovedajúce jednotlivým dobám kmitu vypočítame podľa (4). Keďže vo vzťahu (4) vystupuje len jedná meraná veličina, tak relatívne chyby ω_i sú rovnaké ako relatívne chyby im zodpovedajúcich dôb kmitu T_i ; na základe týchto relatívnych chýb určíme im zodpovedajúce absolútne chyby.

Kyvadlo 1:

- $w_0 = (3,27 \pm 0,03)s^{-1}$ $h_{w_0} = 1,0 \cdot 10^{-2}$

Kyvadlo 2:

- $w'_0 = (3,28 \pm 0,03)s^{-1}$ $h_{w'_0} = 1,0 \cdot 10^{-2}$

Dlhšia pružina:

- $w_1 = (3,28 \pm 0,03)s^{-1}$ $h_{w_1} = 1,0 \cdot 10^{-2}$
- $w_2 = (3,75 \pm 0,05)s^{-1}$ $h_{w_2} = 1,2 \cdot 10^{-2}$
- $w_3 = (3,51 \pm 0,13)s^{-1}$ $h_{w_3} = 3,7 \cdot 10^{-2}$
- $w_4 = (0,240 \pm 0,004)s^{-1}$ $h_{w_4} = 1,5 \cdot 10^{-2}$

Kratšia pružina:

- $w'_1 = (3,27 \pm 0,03)s^{-1}$ $h_{w'_1} = 1,0 \cdot 10^{-2}$
- $w'_2 = (3,42 \pm 0,04)s^{-1}$ $h_{w'_2} = 1,1 \cdot 10^{-2}$
- $w'_3 = (3,35 \pm 0,05)s^{-1}$ $h_{w'_3} = 1,5 \cdot 10^{-2}$

- $w_4' = (0,0722 \pm 0,0003)s^{-1}$ $h_{w_4'} = 4,8 \cdot 10^{-3}$

Na základe nameraných kruhových frekvencií ω_1 a ω_2 vypočítame podľa vzťahov (11) a (12) kruhové frekvencie ω_3 a ω_4 . Ich relatívne chyby určíme podľa prenosu chýb.

Dlhšia pružina:

- $w_3 = (3,52 \pm 0,03)s^{-1}$ $h_{w_3} = 8,5 \cdot 10^{-3}$
- $w_4 = (0,235 \pm 0,03)s^{-1}$ $h_{w_4} = 1,3 \cdot 10^{-1}$

Kratšia pružina:

- $w_3' = (3,35 \pm 0,03)s^{-1}$ $h_{w_3'} = 9,0 \cdot 10^{-3}$
- $w_4' = (0,075 \pm 0,03)s^{-1}$ $h_{w_4'} = 4,0 \cdot 10^{-1}$

Úloha 4:

Stupeň väzby pre obe pružiny určíme podľa vzťahu (14). Ich chyby určíme podľa prenosu chýb.

Dlhšia pružina:

- $k = (0,133 \pm 0,014)$ $h_k = 1,1 \cdot 10^{-1}$

Kratšia pružina:

- $k' = (0,045 \pm 0,015)$ $h_{k'} = 3,3 \cdot 10^{-1}$

Úloha 5:

Závislosť stupňa väzby na vzdialenosti zavesenia pružiny od závesu kyvadla sme určovali pre kratšiu pružinu. Určovali sme dobu desiatich kmitov $10 T_1$ a $10 T_2$ podobne ako v úlohe 2.

Tabuľka 4 – Doby $10 T_1$ a $10 T_2$ pre rôzne vzdialenosti l

	$l_1 = (5,0 \pm 0,3)cm$		$l_2 = (10,0 \pm 0,3)cm$		$l_3 = (15,0 \pm 0,3)cm$		$l_4 = (20,0 \pm 0,3)cm$	
n	$10 T_1 [s]$	$10 T_2 [s]$	$10 T_1 [s]$	$10 T_2 [s]$	$10 T_1 [s]$	$10 T_2 [s]$	$10 T_1 [s]$	$10 T_2 [s]$
1	19,18	19,16	19,17	19,13	19,17	18,99	19,18	18,88
2	19,17	19,10	19,21	19,11	19,16	18,95	19,16	18,79
3	19,18	19,13	19,16	19,12	19,18	19,04	19,16	18,77
4	19,21	19,18	19,18	19,14	19,20	19,01	19,20	18,87
5	19,15	19,18	19,19	19,11	19,16	18,99	19,16	18,80

	$l_5 = (25,0 \pm 0,3)cm$		$l_6 = (30,0 \pm 0,3)cm$		$l_7 = (35,0 \pm 0,3)cm$		$l_8 = (40,0 \pm 0,3)cm$	
n	$10 T_1 [s]$	$10 T_2 [s]$	$10 T_1 [s]$	$10 T_2 [s]$	$10 T_1 [s]$	$10 T_2 [s]$	$10 T_1 [s]$	$10 T_2 [s]$
1	19,20	18,77	19,19	18,60	19,18	18,38	19,18	18,19
2	19,19	18,67	19,17	18,52	19,18	18,40	19,20	18,16
3	19,22	18,69	19,22	18,55	19,20	18,36	19,19	18,14
4	19,18	18,70	19,23	18,56	19,19	18,34	19,17	18,13
5	19,23	18,67	19,20	18,53	19,21	18,35	19,15	18,16

Štatistickým spracovaním týchto nameraných údajov dostaneme doby T_1 a T_2 . σ_{stat} je smerodajnou odchýlkou aritmetického priemeru hodnôt T_1 a T_2 . Túto chybu môžeme zanedbať, lebo na celkovej absolútnej chybe σ_{celk} sa neprejaví (výpočet ako v úlohe 1). σ resp. η znamená absolútnu resp. relatívnu chybu danej veličiny; tieto chyby určíme podľa prenosu chýb, [3]. Stupeň väzby a chybu určíme podobne ako v úlohe 4.

Tabuľka 4 – Spracovanie výsledkov a stupeň väzby

	$l_1 = (5,0 \pm 0,3)cm$		$l_2 = (10,0 \pm 0,3)cm$		$l_3 = (15,0 \pm 0,3)cm$		$l_4 = (20,0 \pm 0,3)cm$	
index údajů	1	2	1	2	1	2	1	2
$T_1, T_2 [s]$	1,918	1,915	1,918	1,912	1,917	1,900	1,917	1,882
σ_{stat}	0,001	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002
σ_{celk}	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020
η_T	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,011	0,010	0,011
ω	3,276	3,281	3,276	3,286	3,278	3,307	3,278	3,339
σ_ω	0,034	0,034	0,034	0,034	0,034	0,035	0,034	0,035
η_ω	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,011	0,010	0,010
κ	0,0015		0,0030		0,0088		0,0184	
σ_κ	0,0147		0,0147		0,0148		0,0147	
η_κ	9,8		4,9		1,7		0,80	

	$l_5 = (25,0 \pm 0,3)cm$		$l_6 = (30,0 \pm 0,3)cm$		$l_7 = (35,0 \pm 0,3)cm$		$l_8 = (40,0 \pm 0,3)cm$	
index údajů	1	2	1	2	1	2	1	2
$T_1, T_2 [s]$	1,920	1,817	1,920	1,855	1,919	1,837	1,918	1,816
σ_{stat}	0,001	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
σ_{celk}	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020
η_T	0,010	0,011	0,010	0,011	0,010	0,011	0,010	0,011
ω	3,272	3,360	3,272	3,387	3,274	3,420	3,276	3,460
σ_ω	0,034	0,036	0,034	0,037	0,034	0,037	0,034	0,038
η_ω	0,010	0,011	0,010	0,011	0,010	0,011	0,010	0,011
κ	0,0265		0,0345		0,0436		0,0546	
σ_κ	0,0149		0,0151		0,0150		0,0151	
η_κ	0,56		0,44		0,34		0,28	

Závislosť stupňa väzby na vzdialenosti zavesenia pružiny od uloženia závesu kyvadla spracujeme pomocou programu *Origin*. Danú závislosť zobrazuje *graf 1*. *Graf 1* zobrazuje krivku, ktorá vznikla kvadratickou interpoláciou $y = 2,02143 \cdot 10^{-5} x^2 + 6,61548 \cdot 10^{-4} x - 0,00391$

Diskusia výsledkov:

Na chybu merania dôb kmitu kyvadiel a z nich vypočítaných kruhových frekvencií mala najväčší vplyv reakčná doba experimentátora; štatistická chyba sa vplyvom opakovaní jednotlivých meraní znížila na zanedbateľnú hodnotu.

Doby kmitu T_0 a T_0' neviazaných fyzikálnych kyvadiel sa v rámci chyby zhodujú, t.j. kyvadlá môžeme považovať za rovnaké. Ďalej je vidieť, že perióda kmitu T_0 sa v rámci chyby neodlišuje od žiadnej z nameraných hodnôt pre dobu kmitu T_1 , čo potvrdzuje, že doba T_1 nijako nezávisí na väzbe kyvadiel (doba T_1 je určená, ak obe začiatočné výchylky sú rovnaké).

Vypočítané hodnoty ω_3 a ω_4 v rámci svojich chýb súhlasia s nameranými hodnotami, čo overuje vzťahy (11) a (12). Pri meraní doby kmitu T_4 bolo veľmi náročné stanoviť, kedy presne prvé kyvadlo nadobúda maximálnu výchylku a druhé kyvadlo je zasa v pokoji.

Na pomerne veľkú relatívnu chybu vypočítanej hodnoty kruhovej frekvencií ω_4 (13 % resp. 40 %) má vplyv tvar vzťahu (12), kde odčítavame dve blízke hodnoty, a tým dostaneme malú hodnotu, kým absolútne chyby nemôžu klesnúť pod chyby odčítaných veličín. Podobným spôsobom vznikla chyba (11 % resp. 33 %) pri určovaní stupňa väzby κ pre obe pružiny pri vzdialenosti pružiny od závesu $l = (36,0 \pm 0,3)cm$.

Pri určovaní závislosti stupňa väzby na vzdialenosti pružiny od závesu je určenie stupňa väzby zaťažené veľkou relatívnou chybou (v troch prípadoch prekračuje 100 %), čo je spôsobené tým, že odčítavame dve blízke hodnoty. S klesajúcou vzdialenosťou upevnenia pružiny od závesu stupeň väzby klesá a je pravdepodobné, že ak by sme pružinu upevnili presne na závese, tak by bola väzba nulová. Závislosť stupňa väzby na vzdialenosti pružiny od závesu môžeme dobre aproximovať polynómom druhého stupňa, čo znázorňuje *graf 1*, v ktorom sú vynesené z experimentálnych hodnôt vypočítané stupne väzby v závislosti na vzdialenosti pružiny od závesu. Aproximácia závislosti stupňa väzby polynómom druhého stupňa je lepšia ako lineárna interpolácia.

Záver:

1. Pre obe kyvadla sme určili dobu kmitu

$$\text{Kyvadlo 1: } T_0 = (1,920 \pm 0,020)s, \quad h_{T_0} = 1,0 \cdot 10^{-2},$$

$$\text{Kyvadlo 2: } T'_0 = (1,918 \pm 0,020)s, \quad h_{T'_0} = 1,0 \cdot 10^{-2}.$$

2. Pre vzdialenosť pružiny od upevnenia závesu $l = (36,0 \pm 0,3)cm$ sme určili tieto doby kmitu

$$\text{Dlhšia pružina: } T_1 = (1,916 \pm 0,020)s, \quad h_{T_1} = 1,0 \cdot 10^{-2},$$

$$T_2 = (1,674 \pm 0,020)s, \quad h_{T_2} = 1,2 \cdot 10^{-2},$$

$$T_3 = (1,792 \pm 0,067)s, \quad h_{T_3} = 3,7 \cdot 10^{-2},$$

$$T_4 = (26,14 \pm 0,40)s, \quad h_{T_4} = 1,5 \cdot 10^{-2},$$

$$\text{Kratšia pružina: } T'_1 = (1,919 \pm 0,020)s, \quad h_{T'_1} = 1,0 \cdot 10^{-2},$$

$$T'_2 = (1,838 \pm 0,020)s, \quad h_{T'_2} = 1,1 \cdot 10^{-2},$$

$$T'_3 = (1,873 \pm 0,029)s, \quad h_{T'_3} = 1,5 \cdot 10^{-2},$$

$$T'_4 = (87,01 \pm 0,42)s, \quad h_{T'_4} = 4,8 \cdot 10^{-3}.$$

3. Týmto periódam zodpovedajú kruhové frekvencie

$$\text{Kyvadlo 1: } w_0 = (3,27 \pm 0,03)s^{-1}, \quad h_{w_0} = 1,0 \cdot 10^{-2},$$

$$\text{Kyvadlo 2: } w'_0 = (3,28 \pm 0,03)s^{-1}, \quad h_{w'_0} = 1,0 \cdot 10^{-2},$$

$$\text{Dlhšia pružina: } w_1 = (3,28 \pm 0,03)s^{-1}, \quad h_{w_1} = 1,0 \cdot 10^{-2},$$

$$w_2 = (3,75 \pm 0,05)s^{-1}, \quad h_{w_2} = 1,2 \cdot 10^{-2},$$

$$w_3 = (3,51 \pm 0,13)s^{-1}, \quad h_{w_3} = 3,7 \cdot 10^{-2},$$

$$w_4 = (0,240 \pm 0,004)s^{-1}, \quad h_{w_4} = 1,5 \cdot 10^{-2}.$$

$$\text{Kratšia pružina: } w'_1 = (3,27 \pm 0,03)s^{-1}, \quad h_{w'_1} = 1,0 \cdot 10^{-2},$$

$$w'_2 = (3,42 \pm 0,04)s^{-1}, \quad h_{w'_2} = 1,1 \cdot 10^{-2},$$

$$w'_3 = (3,35 \pm 0,05)s^{-1}, \quad h_{w'_3} = 1,5 \cdot 10^{-2},$$

$$w'_4 = (0,0722 \pm 0,0003)s^{-1}, \quad h_{w'_4} = 4,8 \cdot 10^{-3}.$$

Kruhové frekvencie určené podľa (11) a (12) v rámci chyby zodpovedajú nameraným hodnotám, čo overuje dané vzťahy

$$\text{Dlhšia pružina: } w_3 = (3,52 \pm 0,03)s^{-1}, \quad h_{w_3} = 8,5 \cdot 10^{-3},$$

$$w_4 = (0,235 \pm 0,03)s^{-1}, \quad h_{w_4} = 1,3 \cdot 10^{-1}.$$

Kratšia pružina: $w_3' = (3,35 \pm 0,03)s^{-1}$, $h_{w_3} = 9,0 \cdot 10^{-3}$,
 $w_4' = (0,075 \pm 0,03)s^{-1}$, $h_{w_4} = 4,0 \cdot 10^{-1}$.

4. Pre obe pružiny sme určili stupeň väzby

Dlhšia pružina: $k = (0,133 \pm 0,014)$, $h_k = 1,1 \cdot 10^{-1}$.

Kratšia pružina: $k' = (0,045 \pm 0,015)$, $h_{k'} = 3,3 \cdot 10^{-1}$.

5. Určili sme závislosť stupňa väzby na vzdialenosti zavesenia pružiny od uloženia závesu kyvadla, ktorú znázorňuje *graf 1*.

Literatúra:

[1] Brož, J. a kol.: Základy fyzikálních měření I; SPN; Praha 1967; kap. 2.2, st. 2.2.2, čl. 2.2.2.4

[2] Študijný text z www stránky fyzikálneho praktika MFF UK

[3] English, J.; Zpracování výsledků fyzikálních měření, LS 1999/2000

Graf 1 - Závislosť stupňa väzby na vzdialenosti pružiny od ulženia závesu kyvadla

