

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

## PRAKTIKUM I

Úloha č.: .....VIII.....

Název: Meranie modulu pružnosti v ťahu

Vypracoval:.... **Viktor Babjak** ... stud. sk. .. F 11 .. dne..... 2. 5. 2005 ....

Odevzdal dne: ..... vráceno: .....

Odevzdal dne: ..... vráceno: .....

Odevzdal dne: .....

Posuzoval: **Diviš**.....dne ..... výsledek klasifikace .....**1**.....

Připomínky:

Niekoľko drobných štylistických pripomienok (vid' text referátu) – v texte nebolo nič vyznačené

### Pracovné úlohy:

1. Zmerajte modul pružnosti v ťahu  $E$  ocele z predĺženia drôtu.
2. Zmerajte modul pružnosti v ťahu  $E$  ocele a duralu alebo mosadze z prehybu trámiku.
3. Výsledky meraní spracujte pomocou lineárnej regresie.
4. Výsledky meraní graficky znázornite.

### Teoretická časť:

#### Meranie modulu $E$ z predĺženia drôtu

Ak pôsobí na drôt dĺžky  $l_0$  a prierezu  $S$  sila  $F$ , potom v obore pružnej deformácie je predĺženie drôtu  $\Delta l$  dané výrazom

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{l_0 F}{S}, \quad (1)$$

kde  $E$  je modul pružnosti v ťahu, ktorý udáva pomer medzi napätím  $\sigma$

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (2)$$

a relatívnym predĺžením (deformáciou)  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (3)$$

Z rovníc (1), (2) a (3) pre modul pružnosti vyplýva

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{l_0 F}{\Delta l S}. \quad (4)$$

Ak použijeme tzv. zrkadlovú metódu, môžeme meranie predĺženia drôtu  $\Delta l$  previesť na meranie uhlu pootočenia zrkadla  $\Delta \alpha$

$$r \Delta \alpha = \Delta l, \quad (5)$$

kde  $r$  je polomer kladky.

Rovnomerne osvetlená zvislá stupnica je umiestnená vo vzdialenosti  $L$  od zrkadla tak, aby bolo možné ďalekohľadom pozorovať obraz stupnice v zrkadle. Pri rovnovážnej polohe zrkadla je v ďalekohľade vidieť dielik stupnice  $n_0$ , po otočení zrkadla o uhol  $\Delta \alpha$  dielik stupnice  $n$ . Pre vzdialenosť  $n - n_0$  platí

$$\operatorname{tg}(2\Delta \alpha) = \frac{n - n_0}{L}. \quad (6)$$

Vzhľadom k veľkosti uhlu pootočenia zrkadla môžeme pre výpočet uhlu  $\Delta \alpha$  použiť približný vzťah

$$\Delta \alpha \approx \frac{n - n_0}{2L}. \quad (7)$$

Ak do (4) a (5) dosadíme vzťah (7), veľkosť tiažovej sily a obsah kruhu, dostaneme pre modul pružnosti drôtu s priemerom  $d$  vzťah

$$E = \frac{8\Delta m g l_0 L}{\pi r d^2 (n - n_0)}. \quad (8)$$

Označme  $k = \frac{n - n_0}{\Delta m} = \frac{\pi r d^2 E}{8\Delta m g l_0 L}$  (9), tento koeficient môžeme určiť pomocou lineárnej regresie.

Smerodajné odchýlky  $s_{n-n_0}$  sú rovnaké, potom pre výpočet smerodajnej odchýlky regresného

koeficientu  $k$  platí  $s_k = \frac{s_{n-n_0}}{\sqrt{\sum \Delta m_i^2}}$  (10).

Pre relatívnu chybu modulu pružnosti  $E$  platí

$$h_E = \sqrt{h_{l_0}^2 + h_L^2 + h_r^2 + h_k^2 + (2h_d)^2}, \quad (11)$$

kde  $\eta$  znamená relatívnu chybu zadanej veličiny. Chyby určenia  $m$  a  $g$  sú oproti ostatným zanedbateľné.

#### Meranie modulu $E$ z prehybu trámiku

Modul pružnosti  $E$  v ťahu môžeme určiť aj nepriamo – meraním prehybu trámiku obdĺžnikového tvaru podopretého pomocou dvoch britov vo vzdialenosti  $l$ . Pri zaťažení trámiku uprostred silou  $F$  sa trámik prehne tak, že v pôsobisku sily vznikne prehyb  $y$ , pre ktorý platí

$$y = \frac{Fl^3}{48EI_p}, \quad (12)$$

kde  $I_p$  je plošný moment zotrvačnosti prierezovej plochy tyče vzhľadom k vodorovnej osi, kolmej k dĺžke trámiku a prechádzajúcej ťažiskom.

Pre obdĺžnikový prierez trámiku výšky  $b$ , dĺžky  $a$  môžeme  $I_p$  vyjadriť vzt'ahom

$$I_p = \frac{ab^3}{12}. \quad (13)$$

Pre modul pružnosti  $E$  po dosadení (13) do (12) dostaneme

$$E = \frac{mgl^3}{4yab^3}. \quad (14)$$

Označme  $c = \frac{y}{m} = \frac{4Eab^3}{dl^3}$  (15), tento koeficient určíme pomocou lineárnej regresie. Smerodajnú

odchýlku regresného koeficientu  $c$  určíme podľa vzt'ahu podobnému (10).

Pre relatívnu chybu  $E$  platí

$$h_E = \sqrt{h_c^2 + h_a^2 + (3h_b)^2 + (3h_l)^2}. \quad (16)$$

Chybu určenia  $m$  a  $g$  môžeme v porovnaní s ostatnými zanedbať.

### Výsledky merania:

#### Meranie modulu pružnosti z predĺženia drôtu

Pomocou pásového meradla sme určili dĺžku drôtu  $l_0$  (t.j. vzdialenosť od upevnenia k miestu dotyku s kladkou) a vzdialenosť stupnice od zrkadla  $L$ . Vzhľadom k nepresnosti určenia bodu dotyku drôtu a kladky i bodu upevnenia odhadneme chybu hodnoty  $l_0$  na 1 cm; chybu určenia  $L$  odhadneme takisto na 1 cm.

Tabuľka 1 – Dĺžka drôtu a vzdialenosť stupnice od zrkadla

číslo merania $n$	dĺžka drôtu $l_0$ [cm]	vzdialenosť stupnice od zrkadla $L$ [cm]
1	114,0	97,1
2	114,1	97,0
3	114,0	97,2
4	113,9	97,1
5	113,9	97,1
$\mu$ [cm]	113,98	97,1
$\sigma_{stat}$ [cm]	0,04	0,03

V tabuľke  $\mu$  znamená strednú hodnotu aritmetického priemeru hodnôt a  $\sigma_{stat}$  smerodajnú odchýlku aritmetického priemeru hodnôt. Absolútnu chybu veličín určíme ako kvadratický priemer smerodajnej odchýlky a chyby merania; pričom  $\sigma_{stat}$  je zanedbateľná voči chybe merania.

Dĺžka drôtu  $l_0$ :

- $l_0 = (114,0 \pm 1,0) \text{ cm}$   $h_{l_0} = 8,8 \cdot 10^{-3}$

Vzdialenosť stupnice od zrkadla:

- $L = (97,1 \pm 1,0) \text{ cm}$   $h_L = 1,0 \cdot 10^{-2}$

Priemer kladky  $D$  sme určili pomocou posuvného meradla a priemer drôtu  $d$  pomocou mikrometra. Chyba meradla je pre  $D$  0,01 cm a pre  $d$  0,01 mm.

Tabuľka 2 – Priemer kladky a priemer drôtu

číslo merania $n$	priemer kladky $D$ [mm]	priemer drôtu $d$ [mm]
1	38,40	0,510
2	38,45	0,510
3	38,40	0,505
4	38,45	0,505
5	38,40	0,510
$\mu$ [mm]	38,42	0,508
$\sigma_{stat}$ [mm]	0,01	0,01

Chybu jednotlivých veličín určíme podobným spôsobom ako v predchádzajúcom prípade.

Priemer drôtu:

- $d = (5,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-4} \text{ m}$   $h_d = 2,0 \cdot 10^{-2}$

Priemer kladky  $D$ :

- $D = (3,84 \pm 0,01) \cdot 10^{-2} \text{ m}$   $h_D = 2,6 \cdot 10^{-3}$

Z nameraného priemeru kladky určíme polomer kladky  $r$ :

- $r = (1,920 \pm 0,005) \cdot 10^{-2} \text{ m}$   $h_r = 2,6 \cdot 10^{-3}$

Na drôt upevníme cez kladku mištičku, na ktorú dávame závažia. Napnutie drôtu dosiahneme pomocou závažia s hmotnosťou 1 kg; ďalej pridávame závažia s hmotnosťou 0,1 kg. Predĺženie drôtu sa prevádza na pootočenie zrkadla; pričom pomocou ďalekohľadu odčítavame dieliky stupnice  $n$ . Pri zaťažení 1 kg určíme predĺženie  $n_0$ ; pri každom ďalšom zaťažení odčítame hodnotu  $n_i'$  zo stupnice. Keď dosiahneme maximálne zaťaženie, odoberáme závažia a na stupnici odčítame hodnotu  $n_i''$ . Do vzťahu (8) dosadzujeme hodnoty  $n_i$  určené ako aritmetický priemer hodnôt  $n_i'$ ,  $n_i''$ .

Tabuľka 3 – Predlžovanie drôtu

$m$ [kg]	zaťažovanie		odľahčovanie	
	$n$ [cm]	$n_0 - n$ [cm]	$n$ [cm]	$n_0 - n$ [cm]
1,0	25,60	0,00	25,55	0,05
1,1	25,35	0,25	25,25	0,35
1,2	25,05	0,55	25,00	0,60
1,3	24,70	0,90	24,70	0,90
1,4	24,45	1,15	24,45	1,15
1,5	24,05	1,55	24,10	1,50
1,6	23,80	1,80	23,85	1,75
1,7	23,50	2,10	23,50	2,10
1,8	23,20	2,40	23,20	2,40
1,9	22,95	2,65	23,00	2,60
2,0	22,65	2,95	22,65	2,95

Výsledky meraní sú znázornené v grafe 1. Namerané hodnoty spracujeme pomocou lineárnej regresie pomocou programu *Origin*. Takto získame regresný koeficient  $k$ , jeho smerodajnú odchýlku určíme podľa (10) pre chybu meradla  $0,05\text{ cm}$ . Chybu  $s_{n-n_0}$  určíme podľa lineárneho zákona prenosu chýb, vid' [3].

- $k = (2,948 \pm 0,095) \cdot 10^{-2} \text{ m.kg}^{-1}$        $h_k = 3,2 \cdot 10^{-2}$

Zo vzťahu (9) po dosadení za  $k$  a  $g = 9,80665 \text{ m.s}^{-2}$  určíme výsledný modul pružnosti; jeho relatívnu chybu určíme podľa (11) a na základe nej určíme absolútnu chybu.

- $E = (188 \pm 10) \text{ GPa}$        $h_E = 5,3 \cdot 10^{-2}$

*Meranie modulu pružnosti z prehybu trámiku*

Pomocou pásového meradla určíme vzdialenosť  $l$  britov, na ktorých boli položené trámiky. Chybu merania odhadneme na  $0,2\text{ cm}$ . Výslednú chybu určíme ako kvadratický priemer smerodajnej odchýlky aritmetického priemeru hodnôt a chyby merania.

*Tabuľka 4 – Vzdialenosť britov*

číslo merania $n$	vzdialenosť britov $l$ [cm]
1	41,1
2	41,2
3	41,1
4	41,1
5	41,1
$\mu$ [cm]	41,12
$\sigma_{stat}$ [cm]	0,02

Vzdialenosť britov:

- $l = (41,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-2} \text{ m}$        $h_l = 4,9 \cdot 10^{-3}$

Rozmery trámikov (šírka  $b$  a výška  $a$ ) sme určili pomocou posuvného meradla. Chyba meradla je  $0,01\text{ cm}$ . Výslednú chybu určíme podobne ako v predchádzajúcom prípade.

*Tabuľka 5 – Rozmery trámikov*

číslo merania $n$	mosadz		ocel'	
	$a_m$ [mm]	$b_m$ [mm]	$a_o$ [mm]	$b_o$ [mm]
1	11,80	1,90	11,95	2,95
2	11,85	1,95	12,00	2,95
3	11,75	1,95	11,90	2,90
4	11,80	1,90	11,95	2,95
5	11,85	1,95	11,90	2,95
$\mu$ [mm]	11,81	1,93	11,94	2,94
$\sigma_{stat}$ [mm]	0,02	0,01	0,02	0,01

Oceľový trámik:

- $a_o = (1,194 \pm 0,010) \cdot 10^{-2} \text{ m}$        $h_{a_o} = 8,4 \cdot 10^{-3}$

- $b_o = (2,94 \pm 0,10) \cdot 10^{-3} \text{ m}$        $h_{b_o} = 3,4 \cdot 10^{-3}$

Mosadzný trámik:

- $a_m = (1,181 \pm 0,010) \cdot 10^{-2} \text{ m}$        $h_{a_m} = 8,5 \cdot 10^{-3}$

- $b_m = (1,93 \pm 0,10) \cdot 10^{-3} \text{ m}$        $h_{b_m} = 5,2 \cdot 10^{-3}$

Trámik umiestnime na brity, do jeho stredu umiestnime stupnicu objektívového mikrometra s miskou na závažia. Objektívovým mikrometrom odčítame hodnotu  $x_0$ . Misku zaťažujeme a odčítavame hodnoty  $x_i'$ . Po dosiahnutí maximálneho zaťaženia misku odľahčujeme a určujeme hodnoty  $x_i''$ . Hodnoty prehybu  $x_i$  určujeme ako ich aritmetický priemer.  $y$  určíme ako  $x_0 - x_i$ .

Tabuľka 6 – Prehyb ocelového a mosadzného trámiku

ocel'					mosadz				
	zaťažovanie		odľahčovanie			zaťažovanie		odľahčovanie	
$m$ [g]	$x$ [mm]	$y$ [mm]	$x$ [mm]	$y$ [mm]	$m$ [g]	$x$ [mm]	$y$ [mm]	$x$ [mm]	$y$ [mm]
0	3,63	0,00	3,63	0,00	0	4,71	0,00	4,71	0,00
50	3,77	0,14	3,78	0,15	25	5,17	0,46	5,17	0,46
100	3,90	0,27	3,90	0,27	50	5,62	0,91	5,62	0,91
200	4,18	0,55	4,17	0,54	75	6,06	1,35	6,07	1,36
300	4,43	0,80	4,43	0,80	100	6,51	1,80	6,52	1,81
400	4,71	1,08	4,70	1,07	125	6,96	2,25	6,97	2,26
500	4,98	1,35	4,97	1,34	150	7,42	2,71	7,43	2,72
600	5,24	1,61	5,23	1,60	175	7,86	3,15	7,85	3,14
					200	8,31	3,60	8,30	3,59

Výsledky meraní sú znázornené v grafe 1 a v grafe 2. Získané výsledky spracujeme pomocou lineárnej regresie pomocou programu *Origin*. Chybu regresného koeficientu  $c$  určíme podľa vzťahu obdobnému (10) pre chybu meradla 0,05 mm. Chybu  $s_{x-x_0}$  určíme z lineárneho zákona prenosu chýb, vid' [3].

- $c_o = (2,67 \pm 0,17) \cdot 10^{-3} m.kg^{-1}$        $h_{c_o} = 6,4 \cdot 10^{-2}$
- $c_m = (1,80 \pm 0,05) \cdot 10^{-2} m.kg^{-1}$        $h_{c_m} = 2,8 \cdot 10^{-2}$

Modul pružnosti  $E$  určíme podľa (14) po dosadení za regresný koeficient a tiažové zrýchlenie  $g = 9,80665 m.s^{-2}$ . Relatívnu chybu modulu pružnosti určíme podľa (16), na základe nej určíme absolútnu chybu.

- $E_o = (210 \pm 14) GPa$        $h_{E_o} = 6,7 \cdot 10^{-2}$
- $E_m = (111 \pm 4) GPa$        $h_{E_m} = 3,6 \cdot 10^{-2}$

### Diskusia výsledkov:

Obe deformácie (predlžovanie drôtu aj prehyb trámiku) boli pružné, pretože namerané údaje pre zaťažovanie a odľahčovanie v rámci chyby merania súhlasia. Odchýlky môžu byť spôsobené napríklad nerovnomerným zaťažením mištičky. Odčítanie jednotlivých hodnôt na stupniciach ja zreteľne ovplyvnené otrasmí v laboratóriu, ktoré sa prejavujú chvením ukazovateľa resp. stupnice.

Tabuľková hodnota modulu pružnosti ocele sa najčastejšie pohybuje v rozmedzí 200 GPa až 220 GPa, vid' [4]. Hodnota  $E_o$  určená metódou prehybu trámiku (s relatívnou chybou 6,7 %) sa s tabuľkovou hodnotou zhoduje. Hodnota modulu pružnosti určená metódou predlženia drôtu (s relatívnou chybou 5,3 %) sa od tabuľkovej hodnoty aj hodnoty určenej metódou prehybu trámiku odlišuje. Odlišnosť vypočítaných hodnôt môže byť zapríčinená tým, že trámik a drôt nemusia byť vyrobené z rovnakého druhu ocele, prípadne systematickou chybou merania.

Tabuľková hodnota modulu pružnosti mosadze je 100 – 110 GPa, vid' [4]. Hodnota modulu pružnosti mosadze určená metódou prehybu trámiku (s relatívnou chybou 3,6 %) sa s tabuľkovou hodnotou v rámci chyby zhoduje.

### **Záver:**

Ukázali sme, že platí Hookov zákon a že daná deformácia je elastická.

Metódou založenou na meraní predĺženia drôtu sme určili modul pružnosti v ťahu pre oceľový drôt

$$E = (188 \pm 10) \text{ GPa} \quad h_E = 5,3 \cdot 10^{-2}$$

Metódou založenou na meraní prehybu trámiku sme určili oceľového trámiku

$$E_0 = (210 \pm 14) \text{ GPa} \quad h_{E_0} = 6,7 \cdot 10^{-2}$$

a mosadzného trámiku

$$E_m = (111 \pm 4) \text{ GPa} \quad h_{E_m} = 3,6 \cdot 10^{-2}$$

### **Literatúra:**

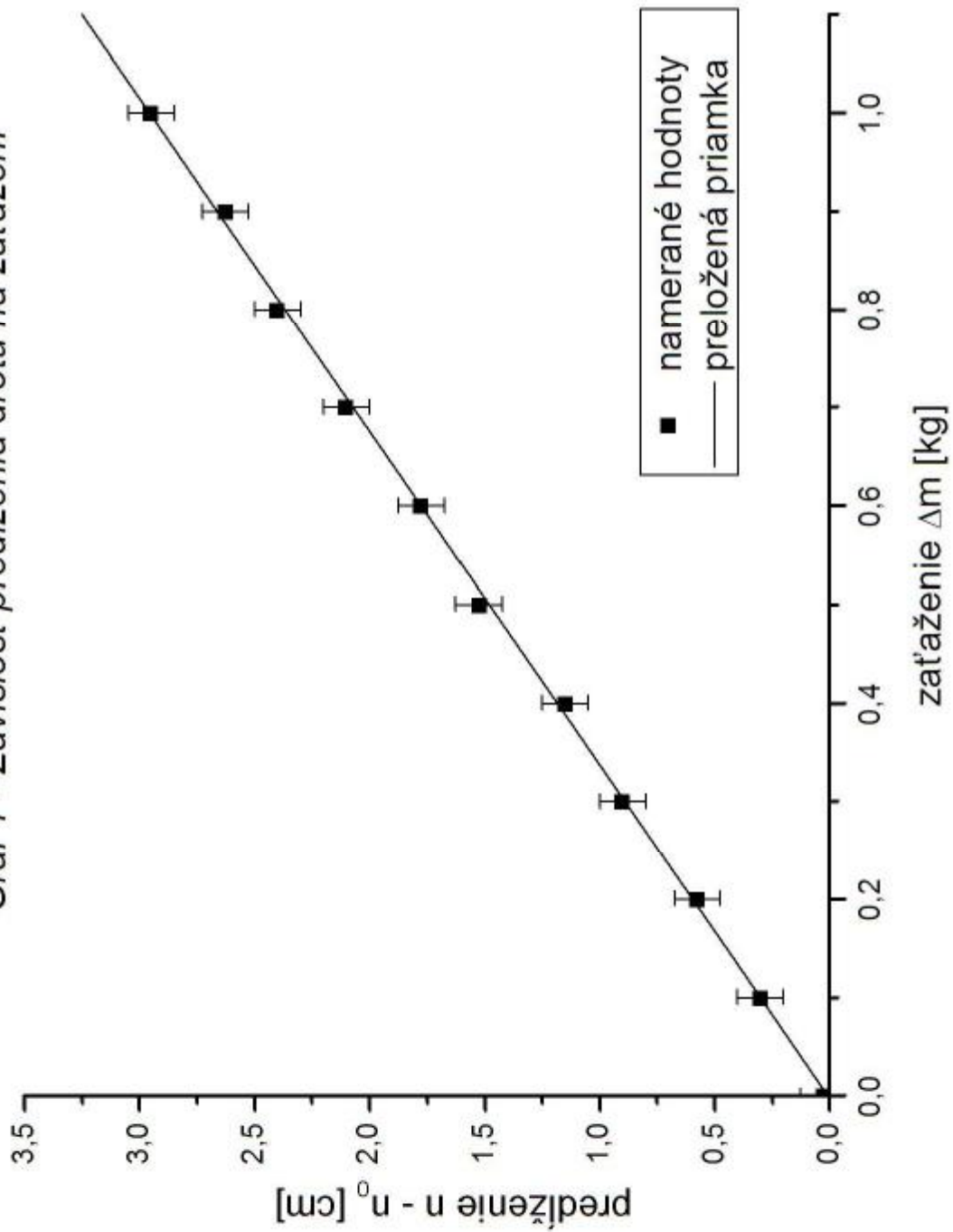
[1] Brož, J. a kol.: Základy fyzikálných mĚření I; SPN; Praha 1967

[2] Študijný text z www stránky fyzikálneho praktika MFF UK

[3] English, J.; Zpracování výsledků fyzikálných mĚření, LS 1999/2000

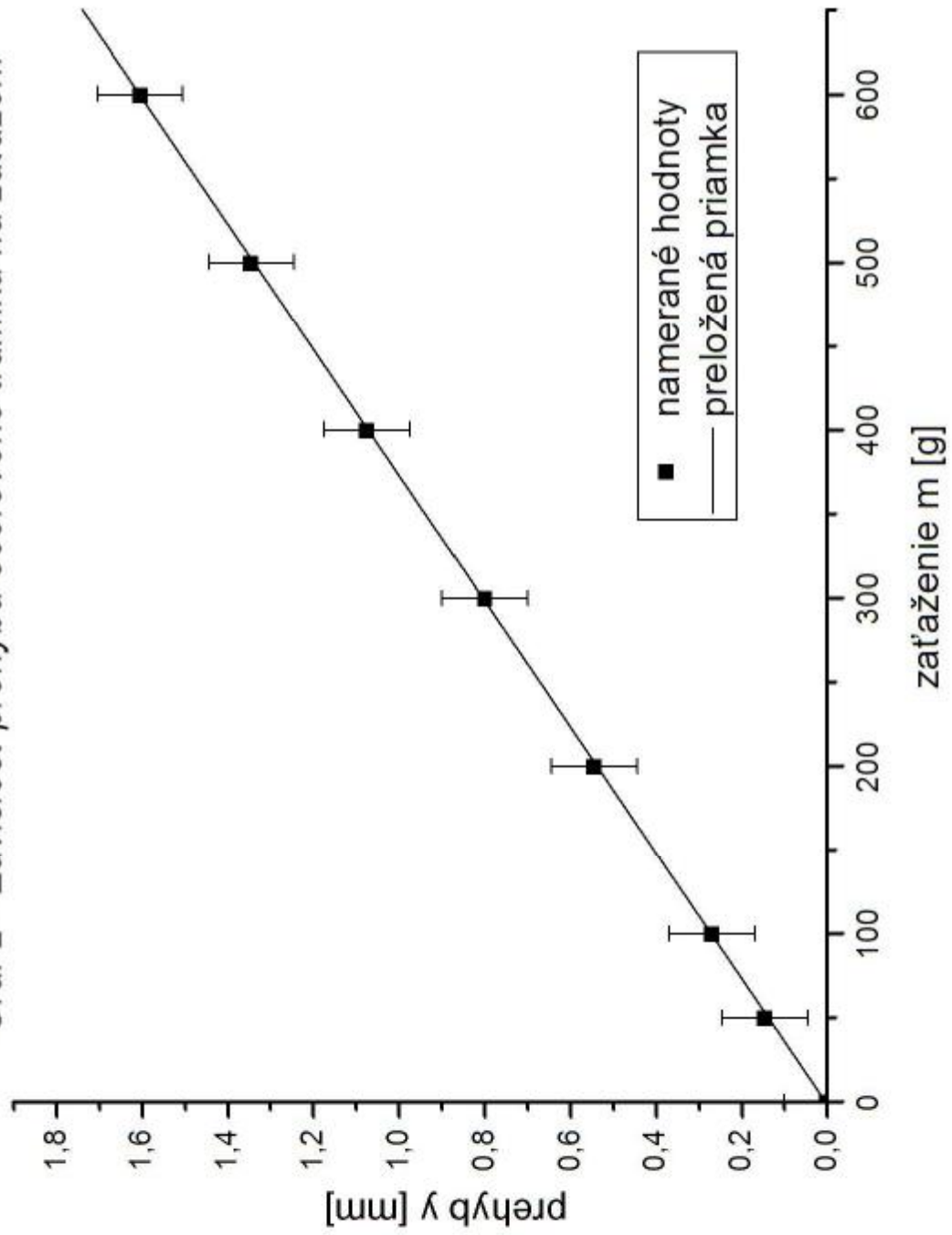
[4] Mikulčák, J. a kol.; Matematické, fyzikálne a chemické tabuľky pre SŠ; SPN; Bratislava 2002

Graf 1 - Závislosť predĺženia drôtu na zaťažení





Graf 2 - Závislosť prehybu ocelového trámiku na zaťažení



Graf 3 - Závislosť prehybu mosadzného trámiku na zaťažení

