Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM I

Úloha č.: ....XVII............
Název:............Štúdium otáčania tuhého telesa ....
Vypracoval:.... **Viktor Babjak** ... stud. sk. .. F 11 .. dne... 3. 3. 2005 ....
Odevzdal dne: .... vráceno: ....
Odevzdal dne: .... vráceno: ....
Odevzdal dne: ....

Posuzoval: Král........................dne .... výsledek klasifikace ......1-..........
Připomínky:

Chyby udávajte na jednu platnú čislícu.

Pracovná úloha:

1. Zmerajte momenty zotrvačnosti kvádra vzhľadom k hlavným osiam zotrvačnosti.
2. Určite zložky jednotkového vektoru v smere zadanej všeobecnej osy rotácie kvádra v súradnicovej sústave danej hlavnými osami zotrvačnosti.
3. Vypočítajte moment zotrvačnosti kvádra vzhľadom k zadanej osy rotácie. Výsledok overte meraním.
4. Meraním overte Steinerovu vetu.

Teoretická časť:

Meraním môžeme moment zotrvačnosti telesa stanoviť metódou torzných kmitov ([1], str. 108). Pre periódu malých torzných kmitov platí vzťah

$$T = 2p\sqrt{\frac{I}{D}}, \qquad (1)$$

kde I je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom k osy, ktorou prechádza záves, D je direkčný moment.

Direkčný moment vylúčime, ak určíme periódu T_V torzných kmitov telesa so známym momentom zotrvačnosti I_V – týmto telesom bude valec ([1], str. 109)

$$T_V = 2p\sqrt{\frac{I_V}{D}} \quad . \qquad (2)$$

Pre moment zotrvačnosti valca platí ([1], str. 108)

$$I_V = \frac{1}{2}m_V R_V^2 = \frac{1}{8}m_V d_V^2, \qquad (3)$$

kde m_V je hmotnosť valca, R_V je polomer valca, d_V je priemer valca.

Z (1), (2) a (3) pre moment zotrvačnosti platí

$$I = \frac{T^2}{T_V^2}I_V = \frac{T^2}{8T_V^2}m_V d_V^2 \qquad (4)$$

Takto môžeme určiť momenty zotrvačnosti I_x, I_y, I_z vzhľadom k hlavným osiam zotrvačnosti ([1], str. 110). Moment zotrvačnosti telesa I vzhľadom k ľubovoľnej osy rotácie prechádzajúcej ťažiskom súvisí s hlavnými momentmi zotrvačnosti pre ťažisko telesa vzťahom

$$I = v_x^2 I_x + v_y^2 I_y + v_z^2 I_Z, \qquad (5)$$

kde v_i sú zložky jednotkového vektoru v súradnicovej sústave spojenej s telesom. Vektor $\vec{v}$ má smer osy, vzhľadom ku ktorej má teleso moment zotrvačnosti I.

Zložky jednotkového vektoru sú dané vzťahmi

$$v_x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, v_y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, v_z = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \qquad (6)$$

kde a, b, c sú strany kvádra.

Na overenie Steinerovej vety použijeme tyč ako fyzikálne a torzné kyvadlo ([1], str. 111). Pre periódu malých kmitov fyzikálneho kyvadla platí vzťah

$$T_{fyz} = 2p\sqrt{\frac{I_{fyz}}{m_t g l'}}, \qquad (7)$$

kde m_t je hmotnosť tyče, l' je vzdialenosť ťažiska od osy otáčania, I_t je moment zotrvačnosti tyče vzhľadom k osy otáčania.

Pre moment zotrvačnosti I_{fyz} platí

$$I_{fyz} = \frac{T_{fyz}^2}{4p^2}m_t g l'. \qquad (8)$$

Potom určíme dobu kmitu tyče tak, že tyč pripevníme v ťažisku ako torzné kyvadlo, a tak určíme moment zotrvačnosti tyče I_t vzhľadom k osy prechádzajúcej ťažiskom. Porovnaním I_{fyz} a I_0 by mala platiť Steinerova veta

$$I_0 = I_{fyz} - m_t l'^2 . \qquad (9)$$

Popis metódy merania:

- Na laboratórnych váhach určíme hmotnosť kvádra, valca a tyče.
- Pomocou posuvného meradla určíme rozmery kvádra a valca.
- Na torzný záves zavesíme valec a zmeriame dobu torzných kmitov (opakujeme 10-krát po 10 kmitov).
- Na torzný záves zavesíme kváder tak, aby sme určili dobu kmitu vo všetkých hlavných osiach. Potom kváder pripevníme za úchyt, ktorý prechádza osou, voči ktorej chceme určiť moment zotrvačnosti (každé meranie opakujeme 10-krát po 10 kmitov).
- Pomocou dĺžkového meradla určíme vzdialenosť *l'* ťažiska tyče od osy otáčania a postupne určíme dobu kmitu tyče ako fyzikálneho kyvadla na oboch britoch – tým overíme symetriu tyče (opakujeme 20-krát po 20 kmitov). Na torzné vlákno pripevníme tyč a určíme dobu torzných kmitov.

Výsledky merania:

Hmotnosť kvádra m_k, hmotnosť valca m_V, hmotnosť tyče m_t

- $m_k = (1072{,}2 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3} kg$, $h_{m_k} = 9{,}3 \cdot 10^{-5}$
- $m_V = (953{,}5 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3} kg$, $h_{m_V} = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$
- $m_t = (281{,}8 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3} kg$, $h_{m_t} = 3{,}5 \cdot 10^{-4}$, kde μ je relatívna chyba zadanej veličiny

Rozmery kvádra *a*, *b*, *c*, priemer valca d_V, vzdialenosť *l* os rotácie na tyči (platí $l' = \frac{l}{2}$):

Tabuľka 1 – rozmery telies

N	*a* [*cm*]	*b* [*cm*]	*c* [*cm*]	d_V [*cm*]	*l* [*cm*]
1	12,785	6,405	1,905	10,805	31,9
2	12,790	6,410	1,910	10,800	31,8
3	12,785	6,405	1,905	10,805	31,9
4	12,790	6,410	1,910	10.805	31,8
5	12,790	6,405	1,905	10,800	31,9
μ [*cm*]	12,788	6,407	1,907	10,803	31,86
σ_{stat} [*cm*]	0,001	0,001	0,001	0,001	0,02

- σ_{stat} je smerodajná odchýlka aritmetického priemeru hodnôt ([3], str. 38)

$$s_{stat} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2}{n(n-1)}} \qquad (10)$$

- σ_{mer} je chyba meradla ([3], str. 9)
  - posuvné meradlo σ_{mer} = 0,005 *cm*
  - dĺžkové meradlo σ_{mer} = 0,05 *cm*
- Absolútnu chybu určíme podľa vzťahu

$$s = \sqrt{s_{stat}^{2} + s_{mer}^{2}} \qquad (11)$$

Rozmery telies s absolútnou chybou

- $a = (12{,}788 \pm 0{,}005) cm$, $\quad h_a = 4{,}0 \cdot 10^{-4}$
- $b = (6{,}407 \pm 0{,}005) cm$, $\quad h_b = 8{,}0 \cdot 10^{-4}$
- $c = (1{,}907 \pm 0{,}005) cm$, $\quad h_c = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$
- $d_V = (10{,}803 \pm 0{,}005) cm$, $\quad h_{d_V} = 4{,}7 \cdot 10^{-4}$
- $l = (31{,}86 \pm 0{,}06) cm$, $\quad h_l = 1{,}7 \cdot 10^{-3}$

Doby kmitu sme merali stopkami riadenými sieťovou frekvenciou 50 *Hz*. Najprv sme zistili, že sieťová frekvencia je 50 *Hz*, t.j. merané údaje nemusíme korigovať.
Doby torzných kmitov kvádra podľa hlavných os T_x, T_y, T_z (os x je rovnobežná so stranou a, os y so stranou b, os z stranou c); podľa telesovej uhlopriečky T_{uhl}

Tabuľka 2 – doby torzných kmitov kvádra

N	*10* T_x [s]	T_x [s]	*10* T_y [s]	T_y [s]	*10* T_z [s]	T_z [s]	*10* T_{uhl} [s]	T_{uhl} [s]
1	52,00	5,200	94,64	9,464	105,00	10,500	63,25	6,325
2	52,01	5,201	94,23	9,423	104,86	10,486	63,15	6,315
3	51,95	5,195	94,55	9,455	104,80	10,480	63,30	6,330
4	52,01	5,201	94,25	9,425	104,99	10,499	63,20	6,320
5	52,02	5,202	94,95	9,495	105,52	10,552	63,36	6,336
6	52,03	5,203	94,66	9,466	105,41	10,541	63,38	6,338
7	51,93	5,193	94,78	9,478	105,08	10,508	63,34	6,334
8	51,94	5,194	94,35	9,435	105,07	10,507	63.40	6,340
9	51,99	5,199	94,45	9,445	105,47	10,547	63,30	6,330
10	52,01	5,201	94,11	9,411	105,16	10,516	63,37	6,337
μ [s]		5,199		9,450		10,514		6,331
σ_{stat} [s]		0,001		0,008		0,008		0,003

Z nameraných hodnôt vyradíme všetky, pre ktoré je

$$|x_i - m| \geq 3s_{stat} \qquad (12)$$

a zopakujeme výpočet strednej hodnoty μ a odchýlky σ_{stat} ([3], str. 37).
Hodnoty T_x pre n = 3, 7, 8; hodnoty T_y pre n = 2, 5, 7; hodnota T_z pre n = 2 a hodnoty T_{uhl} pre n = 2, 4, 8 sa nenachádzajú v intervale určeným vzťahom (12), a preto ich vyradíme zo štatistického spracovania.
Absolútnu chybu určíme podľa (10). σ_{mer} je v tomto prípade reakčná doba experimentátora, ktorá odhadom je asi 0,2 *s*. σ_{stat} môžeme v porovnaní so σ_{mer} vo vzťahu (12) zanedbať.
Doby torzných kmitov kvádra

- $T_x = (5{,}20 \pm 0{,}02)s$, $\quad h_{T_x} = 3{,}8 \cdot 10^{-3}$
- $T_y = (9{,}44 \pm 0{,}02)s$, $\quad h_{T_y} = 2{,}1 \cdot 10^{-3}$
- $T_z = (10{,}52 \pm 0{,}02)s$, $\quad h_{T_z} = 1{,}9 \cdot 10^{-3}$
- $T_{uhl} = (6{,}33 \pm 0{,}02)s$, $\quad h_{T_z} = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$

Doby torzných kmitov valca T_v podľa jeho osy súmernosti, tyče T_t podľa osy prechádzajúcej ťažiskom a kolmej k jej os súmernosti:

Tabuľka 3 – doby torzných kmitov valca a tyče

n	$10\ T_v$ [s]	T_v [s]	$5\ T_t$ [s]	T_t [s]
1	98,76	9,876	70,60	14,120
2	98,40	9,840	70,77	14,154
3	98,30	9,830	70,47	14,094
4	98,94	9,894	70,43	14,086
5	98,54	9,854	70,71	14,142
6	98,22	9,822	70,81	14,162
7	98,68	9,868	70,63	14,126
8	98,58	9,858	70,08	14,016
9	98,72	9,872	70,78	14,156
10	98,33	9,833	70,96	14,192
μ [s]		9,855		14,124
σ_{stat} [s]		0,007		0,016

Zo súboru nameraných veličín vyradíme tie, ktoré nesplňujú vzťah (12), t.j. hodnoty T_v pre n = 4, 6 a hodnoty T_t pre n = 8, 10. Absolútnu chybu určíme tak ako v predchádzajúcom prípade.

Doba torzných kmitov valca a tyče

- $T_v = (9{,}85 \pm 0{,}02)s$, $\quad h_{T_v} = 2{,}0 \cdot 10^{-3}$
- $T_t = (14{,}12 \pm 0{,}04)s$, $\quad h_{T_t} = 2{,}8 \cdot 10^{-3}$

Momenty zotrvačnosti I_x, I_y, I_z, I_{uhl}, I_t určíme podľa (4). Chyby merania určíme podľa teórie prenosu chýb ([3], str. 8 – 9)

- $I_x = (3{,}876 \pm 0{,}033) \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$, $\qquad h_{I_x} = 8{,}6 \cdot 10^{-3}$
- $I_y = (1{,}278 \pm 0{,}007) \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$, $\qquad h_{I_y} = 5{,}8 \cdot 10^{-3}$
- $I_z = (1{,}578 \pm 0{,}009) \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$, $\qquad h_{I_z} = 5{,}5 \cdot 10^{-3}$
- $I_{uhl} = (5{,}744 \pm 0{,}043) \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2$, $\qquad h_{I_{uhl}} = 7{,}6 \cdot 10^{-3}$
- $I_t = (2{,}781 \pm 0{,}019) \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$, $\qquad h_{I_t} = 6{,}9 \cdot 10^{-3}$

Tabuľka 4 – doba kmitu tyče ako fyzikálneho kyvadla

N	$20\ T_{fyz}$ [s]	T_{fyz} [s]	n	$20\ T_{fyz}$ [s]	T_{fyz} [s]
1	18,79	0,9395	11	18,78	0,9390
2	18,80	0,9400	12	18,83	0,9415
3	18,81	0,9405	13	18,81	0,9405
4	18,80	0,9400	14	18,79	0,9395
5	18,77	0,9385	15	18,78	0,9390
6	18,79	0,9395	16	18,80	0,9400
7	18,82	0,9410	17	18,81	0,9405
8	18,80	0,9400	18	18,83	0,9415
9	18,80	0,9400	19	18,78	0,9390
10	18,79	0,9395	20	18,77	0,9385
			μ [s]		0,9397
			σ_{stat} [s]		0,0028

Hodnoty, ktoré nesplňujú vzťah (12) vyradíme zo súboru nameraných hodnôt, t.j. hodnoty T_{fyz} pre n = 12, 18. Reakčnú dobu t.j. σ_{mer} opäť uvažujeme 0,2 s. σ_{stat} môžeme vo vzťahu (12) zanedbať.

Doba kmitu tyče ako fyzikálneho kyvadla

- $T_{fyz} = (0{,}94 \pm 0{,}01)s$, $\quad h_{T_f} = 1{,}1 \cdot 10^{-2}$

Do (8) a (9) dosadíme ***l'***, a tak určíme moment zotrvačnosti tyče voči osy rotácie vzdialenej od ťažiska ***l'***, resp. voči prechádzajúcej ťažiskom (na výpočet chýb merania použijeme teŕiu prenosu chýb ([3]))

- $I_{fyz} = (9{,}898 \pm 0{,}025) \cdot 10^{-3}\, kg.m^2$, $\quad h_{I_{fyz}} = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$
- $I_{fyz0} = (2{,}747 \pm 0{,}041) \cdot 10^{-3}\, kg.m^2$, $\quad h_{I_{fyz0}} = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$

Zložky jednotkového vektora v smere zadanej všeobecnej osy rotácie podľa vzťahu (6). Chyby merania určíme podľa teórie prenosu chýb ([3]).

- $v_x = (886{,}2 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}$, $\quad h_{v_x} = 1{,}1 \cdot 10^{-4}$
- $v_y = (444{,}0 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-3}$, $\quad h_{v_y} = 9{,}0 \cdot 10^{-4}$
- $v_z = (132{,}2 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-3}$, $\quad h_{v_z} = 3{,}0 \cdot 10^{-4}$

Moment zotrvačnosti kvádra podľa vzťahu (5). Chyby merania určíme podľa teórie prenosu chýb ([3]).

- $I'_{uhl} = (5{,}841 \pm 0{,}022) \cdot 10^{-4}\, kg \cdot m^2$, $\quad h_{I'_{uhl}} = 3{,}8 \cdot 10^{-3}$

Diskusia výsledkov:

Meranie momentu zotrvačnosti je najviac ovplyvnené systematickou chybou pri meraní doby kmitu (určenie momentu zotrvačnosti závisí od štvorca doby kmitu telesa). Reakčná doba experimentátora (určenie okamihu prechodu telesa uvažovanou polohou) je odhadom asi 0,2 s. Reakčná doba sa prejaví tým menej, čím viac kmitov daného telesa odmeriame. Chyba pri meraní doby torzných kmitov súvisí s tým, že teleso môže okrem torzných kmitov vykonávať aj bočné kmity, a tak vzniká chyba merania. Vo vzťahu pre moment zotrvačnosti vystupuje aj hmotnosť telesa, polomer valca a vzdialenosť osy otáčania tyče, no určenie hmotnosti na laboratórnych váhach a určenie rozmerov telies je dosť presné, t.j. veľmi neovplyvňuje chybu určenia momentu zotrvačnosti.

Záver:

1. Pre momenty zotrvačnosti kvádra vzhľadom k hlavným osiam zotrvačnosti platí

$$I_x = (3{,}876 \pm 0{,}033) \cdot 10^{-3}\, kg \cdot m^2, \qquad h_{I_x} = 8{,}6 \cdot 10^{-3},$$
$$I_y = (1{,}278 \pm 0{,}007) \cdot 10^{-3}\, kg \cdot m^2, \qquad h_{I_y} = 5{,}8 \cdot 10^{-3}$$
$$I_z = (1{,}578 \pm 0{,}009) \cdot 10^{-3}\, kg \cdot m^2, \qquad h_{I_z} = 5{,}5 \cdot 10^{-3}.$$

2. Pre zložky jednotkového vektoru v smere zadanej všeobecnej osy rotácie kvádra v súradnicovej sústave danej hlavnými osami zotrvačnosti podľa (6) platí

$$v_x = (886{,}2 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}, \quad h_{v_x} = 1{,}1 \cdot 10^{-4},$$
$$v_y = (444{,}0 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-3}, \quad h_{v_y} = 9{,}0 \cdot 10^{-4},$$
$$v_z = (132{,}2 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-3}, \quad h_{v_z} = 3{,}0 \cdot 10^{-4}.$$

3. Pre moment zotrvačnosti vzhľadom k osy prechádzajúcej jeho uhlopriečkou určený výpočtom pomocou (5) platí

$$I_{uhl} = (5{,}744 \pm 0{,}043) \cdot 10^{-4}\, kg \cdot m^2, \qquad h_{I_{uhl}} = 7{,}6 \cdot 10^{-3}.$$

Pre moment zotrvačnosti určený pomocou torzných kmitov platí

$$I'_{uhl} = (5{,}841 \pm 0{,}022) \cdot 10^{-4}\, kg \cdot m^2, \qquad h_{I'_{uhl}} = 3{,}8 \cdot 10^{-3}.$$

4. Meraním podľa vzťahu (9) sme overili Steinerovu vetu.
   Moment zotrvačnosti tyče určený pomocou torzných kmitov:

$$I_t = (2{,}781 \pm 0{,}019) \cdot 10^{-3}\, kg \cdot m^2, \qquad h_{I_t} = 6{,}9 \cdot 10^{-3}$$

   Moment zotrvačnosti tyče určený pomocou fyzikálnych kmitov:

$$I_{fyz0} = (2{,}747 \pm 0{,}041) \cdot 10^{-3}\, kg.m^2, \qquad h_{I_{fyz0}} = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$$

Literatúra:

[1] Brož, J. a kol.: Základy fysikálních měření I; SPN; Praha 1967; kap. 2.2, st. 2.2.4, čl. 2.2.4.1, čl. 2.2.4.2

[2] Študijný text z webovej stránky fyzikálneho praktika MFF UK

[3] Englich, J.; Zpracovaní výsledků fyzikálních měření, LS 1999/2000