Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM I

Úloha č.: ....XXI...........
Název:............Meranie tiažového zrýchlenia …......................................
Vypracoval:.... **Viktor Babjak** ... stud. sk. .. F 11 .. dne... 7. 3. 2005 ....
Odevzdal dne: .... vráceno: ....
Odevzdal dne: .... vráceno: ....
Odevzdal dne: ....

Posuzoval: Valentová................dne .... výsledek klasifikace ....1-........
Připomínky:

Drobné chyby v texte.
Zle určená chyba g.
Poznámka v teoretickej časti k vete: "osi sú symetricky položené vzhľadom k ťažisku": platilo i v prípade meraného kyvadla?"
Pod tabuľkou 2 je pre odhad chyby uvedené: "Meranie opakujete - rozptyl, an základeň čoho odhadujete chybu?"ň
Komentár k chybám tiažového zrýchlenia: "Relatívna chyba nemôže byť o rád menšia ako chyba l."
Dĺžka d: "Chybne zmerané."
Diskusia - tabuľková hodnota tiažového zrýchlenia pre Prahu: "Nutné uviesť."

Môj komentár:

Zle vypočítané relatívne a absolútne chyby jednotlivých meraní.
Vo vzťahoch neboli zahrnuté konštanty 4/(pi*pi).

Pracovná úloha:

1. Zmerajte miestne tiažové zrýchlenie g metódou reverzného kyvadla.
2. Zmerajte miestne tiažové zrýchlenie g metódou matematického kyvadla.
3. Vypočítajte chybu, ktorej sa dopúšťate idealizáciou reálneho kyvadla v rámci modelu matematického kyvadla.

Teoretická časť:

Ak necháme ľubovoľné teleso kývať v tiažovom poli Zeme okolo osi, ktorá neprechádza ťažiskom telesa, dobu kmitu môžeme dostatočne presne určiť ako

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\left[1+\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right], \tag{1}$$

kde I je moment zotrvačnosti kyvadla vzhľadom k osi otáčania, m je hmotnosť kyvadla, g je miestne tiažové zrýchlenie, d je vzdialenosť ťažiska od osi otáčania, α je maximálna uhlová výchylka ťažiska z rovnovážnej polohy.
Matematickým kyvadlom nazývame hmotný bod s hmotnosťou m, umiestnený na jednom konci nehmotného závesu dĺžky l, voľné otáčavého okolo osi, ktorá prechádza druhým koncom závesu. Pre moment zotrvačnosti takéhoto kyvadla platí

$$I = ml^2. \tag{2}$$

Z (1) a (2) pre dobu kmitu T_M matematického kyvadla dostaneme

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]. \tag{3}$$

Pre malé výchylky z rovnovážnej polohy platí

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{4}$$

Zo vzťahu (4) pre tiažové zrýchlenie platí

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T_M^2}. \tag{5}$$

Matematické kyvadlo reprezentujeme hmotnou guľou s polomerom r a hmotnosťou m_k, na ktorej je háčik dĺžky h, pričom guľa je zavesená na ľahkom vlákne s dĺžkou l a hmotnosťou m_n. Pre moment zotrvačnosti danej sústavy s použitím momentu zotrvačnosti gule a momentu zotrvačnosti tyče vzhľadom k osi prechádzajúcej jej koncovým bodom platí

$$I = \frac{2}{5}m_k r^2 + m_k(L+r+h)^2 + \frac{1}{3}m_n L^2. \tag{6}$$

Po dosadení (6) do (1) pre g platí

$$g = \frac{4\pi^2}{T_M^2}\left[1+\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2 \frac{\frac{2}{5}m_k r^2 + m_k(L+r+h)^2 + \frac{1}{3}m_n L^2}{(m_k+m_n)(L+r+h)}. \tag{7}$$

Reverzným kyvadlom nazývame fyzikálne kyvadlo, ktoré sa kyve s rovnakou dobou kmitu okolo dvoch rovnobežných os ležiacich v rovine, ktorá prechádza ťažiskom kyvadla (tieto osi otáčania sú symetricky položené vzhľadom k ťažisku alebo sú od seba vzdialené o redukovanú dĺžku). Pre dobu kmitu T_r reverzného kyvadla platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}, \tag{8}$$

kde l_r je redukovaná dĺžka kyvadla.

Z (8) pre tiažové zrýchlenie platí

$$g = \frac{4p^2 l_r}{T_r^2}. \qquad (9)$$

Podmienky merania:

Teplota: $T = (23{,}5 \pm 0{,}5)°C$

Vlhkosť vzduchu: $(21{,}6 \pm 0{,}1)\%$

Miesto merania: Praha

Výsledky merania:

Priemer *d* gule, ktorá tvorí matematické kyvadlo, sme určili pomocou posuvného meradla (meranie sme opakovali 5-krát na rôznych miestach gule).

Tabuľka 1 – priemer gule

číslo merania	*d [cm]*
1	2,310
2	2,320
3	2,330
4	2,325
5	2,330
μ*[cm]*	2,323
σ_{stat} *[cm]*	0,003

σ_{stat} je smerodajná odchýlka aritmetického priemeru hodnôt ([3]). Chybu meradla σ_{stat} sme odhadli na 0,01 *cm*. Absolútnu chybu určíme ako kvadratický priemer σ_{stat} a σ_{mer}.

Polomer gule *r*:

- $r = (1{,}162 \pm 0{,}005)cm$ $\quad h_r = 4{,}3 \cdot 10^{-3}$

Dĺžku háčiku *h*, ktorý je pripevnený ku guli, sme určili pomocou posuvného meradla. Chybu meradla odhadneme tak ako v predchádzajúcom prípade, t.j. 0,01 *cm*.

Dĺžka háčiku *h*:

- $h = (0{,}82 \pm 0{,}01)cm$ $\quad h_h = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$

Dĺžku nite *L* sme určili pomocou pásového meradla. V okamihu, keď na niti bola zavesená guľa, sme určili vzdialenosť háčiku gule a závesu, na ktorom bola upevnená niť. Chybu meradla vzhľadom k spôsobu merania a odčítaniu hodnoty sme odhadli na 0,4 *cm*.

Dĺžka nite *L*:

- $L = (98{,}3 \pm 0{,}4)cm$ $\quad h_L = 4{,}1 \cdot 10^{-3}$

Dĺžku matematického kyvadla *l* určíme ako súčet *r*, *h* a *L*. Absolútnu chybu uvažujeme takú istú ako pre *L*.

Dĺžka matematického kyvadla *l*:

- $l = (100{,}3 \pm 0{,}4)cm$ $\quad h_l = 4{,}0 \cdot 10^{-3}$

Hmotnosť gule s háčikom m_k a hmotnosť nite m_n sme určili pomocou technických váh určených na meranie hmotnosti do 200 *g*. Chybu merania odhadneme na 0,005 *g*.

Hmotnosť gule s háčikom m_k:

- $m_k = (55{,}559 \pm 0{,}005)g$ $\quad h_{m_k} = 9{,}0 \cdot 10^{-5}$

Hmotnosť nite m_n:

- $m_n = (0{,}060 \pm 0{,}005)g$ $\qquad h_{m_n} = 8{,}3 \cdot 10^{-2}$

Dobu kmitu matematického kyvadla sme určovali pomocou čítača (10 meraní po 10 kmitov).

Tabuľka 2 – kmity matematického kyvadla

číslo merania	10 T_M *[s]*	T_M *[s]*
1	20,1006	2,01006
2	20,1006	2,01006
3	20,0998	2,00998
4	20,1009	2,01009
5	20,1004	2,01004
6	20,1009	2,01009
7	20,0996	2,00996
8	20,1006	2,01006
9	20,1008	2,01008
10	20,1006	2,01006
μ*[cm]*		2,01005

Meranie doby kmitu matematického kyvadla môže byť zaťažené systematickou chybou prístroja a metódy, a preto chybu merania vzhľadom k rozptylu hodnôt odhadneme na 0,0007 *s*.
Doba kmitu matematického kyvadla T_M:

- $T_M = (2{,}0101 \pm 0{,}0007)s$ $\qquad h_{T_M} = 3{,}5 \cdot 10^{-4}$

Miestne tiažové zrýchlenie g určíme podľa vzťahu (5). Chybu merania g určíme podľa teórie prenosu chýb ([39], str. 39), pričom v tejto chybe nie je uvedená systematická chyba.

$$s_g^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 s_l^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 s_T^2 \qquad (10)$$

Tiažové zrýchlenie g:

- $g = (9{,}800 \pm 0{,}002)ms^{-2}$ $\qquad h_g = 2{,}0 \cdot 10^{-4}$

Pri meraní doby kmitu sme volili výchylku približne $\alpha = 5°$. Ak dosadíme namerané hodnoty do (7) a pritom zanedbáme chybu spôsobenú uhlovou výchylkou α, dostaneme pre tiažové zrýchlenie hodnotu $g = 9{,}793\, ms^{-2}$. Ak uvažujeme aj chybu spôsobenú výchylkou α, tak po dosadení do (7), dostaneme hodnotu $g = 9{,}803\, ms^{-2}$. Z týchto dvoch hodnôt odhadneme, že maximálna chyba spôsobená idealizáciou reálneho kyvadla v rámci modelu matematického kyvadla je 0,005 ms^{-2}, t.j. pomocou matematického kyvadla sme určili hodnotu

- $g = (9{,}800 \pm 0{,}005)ms^{-2}$ $\qquad h_g = 5{,}1 \cdot 10^{-4}$

Vzdialenosť osí otáčania d reverzného kyvadla sme určili pomocou pásového meradla. Chybu merania vzhľadom k spôsobu merania odhadneme na 0,4 *cm*.
Vzdialenosť britov d:

- $d = (99{,}9 \pm 0{,}4)cm$ $\qquad h_d = 4{,}0 \cdot 10^{-3}$

Doby kmitu reverzného kyvadla T_1 a T_2 okolo oboch osí otáčania sme určovali pomocou čítača (tak ako pri matematickom kyvadle). Pri hľadaní polohy šošovky, pri ktorej sú doby kmitu T_1 a T_2 porovnateľné, sme pre dve krajné polohy šošovky určovali dvakrát dobu 5 kmitov. Polohu šošovky na kyvadle sme parametrizovali vzdialenosťou x (vzdialenosť konca kyvadla a vonkajšej matice, ktorá upevňuje šošovku). Vzdialenosť x sme určovali pomocou posuvného meradla.

Tabuľka 3 – poloha šošovky

x_1 = 0,330 *cm*		x_2 = 5,250 *cm*	
5 T_1 *[s]*	5 T_2 *[s]*	5 T_1 *[s]*	5 T_2 *[s]*
10,0652	10,2645	9,86544	9,18074
10,0636	10,2632	9,86356	9,18196

Na určenie polohy šošovky, pri ktorej sa kyvadlo kyve okolo oboch osí s rovnakou dobou kmitu, sme použili grafickú interpoláciou ([2], str. 2). Následným doladením polohy sme dospeli k vzdialenosti x = 1,45 *cm*. Pre túto vzdialenosť sme urobili 10 meraní po 20 kmitov.

Tabuľka 4 – doby kmitu reverzného kyvadla

číslo merania	20 T_1 *[s]*	T_1 *[s]*	20 T_2 *[s]*	T_2 *[s]*
1	40,0988	2,00494	40,1069	2,00535
2	40,1005	2,00503	40,1067	2,00534
3	40,1004	2,00502	40,1069	2,00535
4	40,1008	2,00504	40,1060	2,00530
5	40,1006	2,00503	40,1066	2,00533
6	40,0991	2,00496	40,1061	2,00531
7	40,0997	2,00499	40,1067	2,00534
8	40,0998	2,00499	40,1065	2,00533
9	40,1005	2,00503	40,1068	2,00534
10	40,0998	2,00499	40,1068	2,00534
μ*[s]*		2,00500		2,00533

Doby kmitu T_1 a T_2 sa mierne odlišujú, no tento rozdiel je vzhľadom k chybe určenia vzdialenosti osí otáčania zanedbateľný. Dobu kmitu reverzného kyvadla T_r určíme ako aritmetický priemer všetkých hodnôt pre dobu kmitu. Podľa rozptylu nameraných hodnôt odhadneme chybu merania doby kmitu na 0,0002 *s* (vychádzame z rozdielu aritmetických priemerov T_1 a T_2 – 0,00034 *s*).

Doba kmitu reverzného kyvadla T_r:

- $T_r = (2{,}00516 \pm 0{,}00020)s \qquad h_{T_r} = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$

Ak kyvadlo sa kyve okolo oboch osí s rovnakou dobou kmitu, tak vzdialenosť týchto osí je rovná redukovanej dĺžke kyvadla l_r, t.j. $d = l_r$ (11). Ak (11) dosadíme do (9) určíme hodnotu miestneho tiažového zrýchlenia. Chybu určenia g určíme podľa teórie prenosu chýb ([3], str. 39), t.j. podľa (10).

Tiažové zrýchlenie g:

- $g = (9{,}799 \pm 0{,}001) ms^{-2} \qquad h_g = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$

Diskusia výsledkov:

Pri meraní tiažového zrýchlenia pomocou matematického kyvadla má najväčší vplyv na chybu g určenie dĺžky závesu kyvadla. Určenie doby kmitu matematického kyvadla a systematické chyby sú v porovnaní s ňou zanedbateľné. Porovnaním relatívnych chýb vyplýva, že najväčší podiel na chybe určenia g má okrem určenia dĺžky závesu aj určenie hmotnosti nite, ktorá sa pripočítava do hmotnosti celého kyvadla, chyba určenia doby kmitu matematického kyvadla je v porovnaní s touto chybou o rád menšia.

Pri meraní tiažového zrýchlenia pomocou reverzného kyvadla ma opäť najväčší vplyv na chybu g určenie vzdialenosti osi otáčania, chyba určenia doby kmitu reverzného kyvadla je v porovnaní s touto chybou zanedbateľná.
Hodnoty miestneho tiažového zrýchlenia určené pomocou matematického a reverzného kyvadla sa v rámci chyby zhodujú s tabuľkovou hodnotou tiažového zrýchlenia pre Prahu.

Záver:
Pomocou matematického kyvadla sme určili hodnotu miestneho tiažového zrýchlenia

- $g = (9{,}800 \pm 0{,}002) ms^{-2}$ $\qquad h_g = 2{,}0 \cdot 10^{-4}$

Pomocou reverzného kyvadla sme určili hodnotu g

- $g = (9{,}799 \pm 0{,}001) ms^{-2}$ $\qquad h_g = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$

Literatúra:

[1] Brož, J. a kol.: Základy fysikálních měření I; SPN; Praha 1967; kap. 2.2, st. 2.2.2, čl. 2.2.2.4

[2] Študijný text z www stránky fyzikálneho praktika MFF UK

[3] Englich, J.; Zpracovaní výsledků fyzikálních měření, LS 1999/2000